

Cálculo diferencial

Néstor Daniel Búcari
Laura Langoni
Diego Vallejo

e
exactas

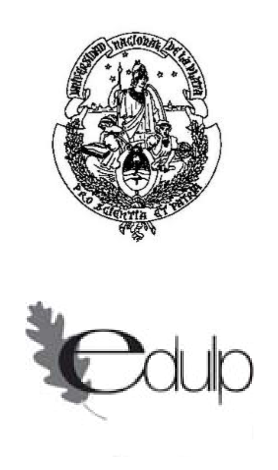
FACULTAD DE
INGENIERÍA





CÁLCULO DIFERENCIAL

Néstor Búcari
Laura Langoni
Diego Vallejo



2013

Búcari , Néstor

Cálculo diferencial en una y varias variables / Néstor Búcari ; Laura Langoni ; Diego Vallejo. - 1a ed. - La Plata : Universidad Nacional de La Plata, 2013.

E-Book: ISBN 978-950-34-1056-1

1. Cálculo Diferencial. 2. Funciones. 3. Enseñanza Universitaria. I. Langoni, Laura II. Vallejo, Diego III. Título

CDD 515.330 711

Fecha de catalogación: 20/12/2013

Diseño de tapa: Dirección de Comunicación Visual de la UNLP





Universidad Nacional de La Plata – Editorial de la Universidad de La Plata

47 N.º 380 / La Plata B1900AJP / Buenos Aires, Argentina
+54 221 427 3992 / 427 4898
editorial@editorial.unlp.edu.ar
www.editorial.unlp.edu.ar

Edulp integra la Red de Editoriales Universitarias Nacionales (REUN)

Primera edición, 2013
ISBN 978-950-34-1056-1

A los docentes

El presente libro consiste, esencialmente, en el material que se desarrolla en la asignatura "Matemática A" que cursan – durante el primer semestre- los alumnos de primer año de todas las carreras de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata, e intenta reflejar las experiencias de docentes y estudiantes que desde el año 2003 han transitado una práctica innovadora de aprendizaje y enseñanza, fundada en el trabajo colaborativo dentro de cada una de las aulas.

En varios sentidos el texto difiere de un libro de Cálculo tradicional. En primer lugar, no se estructura a partir de una lógica expositiva como en los textos más tradicionales, ni tampoco en una propuesta motivacional, tal como los libros más modernos, en los cuales se propone capturar el interés del lector mediante la profusión de elementos visuales y propuestas de aplicaciones. En cambio, este libro se presenta básicamente como un material "a trabajar" por los estudiantes con el apoyo y la guía de los docentes. En este aspecto, el material ha sido probado y reformulado durante múltiples cursos, demostrando ser una herramienta adecuada para introducir a los estudiantes en los conceptos y métodos básicos del Cálculo Diferencial.

La segunda diferencia en importancia es la organización de los contenidos, puesto que se trata el Cálculo Diferencial en una y varias variables, sin entrar en el Cálculo Integral, el cual se abordará en la asignatura siguiente. Tradicionalmente, la secuencia de contenidos contempla el Cálculo Diferencial e Integral en una variable, para luego hacer lo propio en varias variables. La justificación de nuestra elección es la de proponer una organización que responda a la idea de "eje conceptual", en este caso: *el estudio del cambio en una magnitud que pueda ser descripta por una función numérica* sea que dependa de una o de varias variables. De esta manera se resalta la conexión entre ambos casos, puesto que las ideas subyacentes son las mismas y se toma nota de las diferencias que aparecen cuando las situaciones se complican con la introducción de más de una variable.

Es el deseo de los autores que este material pueda resultar de utilidad, ya sea en forma completa o bien parcialmente, a los docentes y estudiantes de los primeros cursos de Cálculo – que con variedad de nombres y características- se brindan en nuestra Universidad a los estudiantes de numerosas careras.

La Plata, agosto de 2013.

Agradecimientos

Los autores desean agradecer:
A la Facultad de Ingeniería de la UNLP, y en particular al Departamento de Ciencias Básicas, por proporcionar un ámbito propicio para el trabajo docente y por haber apoyado siempre la experiencia innovadora de la materia.
A los docentes y estudiantes que participaron del dictado de la asignatura durante los últimos diez años, y que con sus comentarios y observaciones ayudaron a mejorar este material.
Al Dr. Augusto Melgarejo, colega y amigo, por el rico intercambio que sostenemos respecto a la enseñanza y por su colaboración en la producción de este libro.

Índice

Capítulo 1

Funciones numéricas

1.1 Funciones y modelos

ACTIVIDAD

Se quiere construir un depósito de base cuadrada (sin techo) y 36 m^3 de capacidad.

1. ¿Qué altura debe tener el depósito si el lado de la base tiene una longitud de 2m?
2. ¿Cuál es la longitud del lado de la base si la altura es de 4m?
3. ¿Es cierto que dado un número l es posible construir un depósito de manera que el lado de la base mida l?
4. Llamemos l a la longitud del lado de la base y h a la altura del depósito. ¿Es válida la siguiente expresión?
$$h = \frac{36}{l^2}$$
5. Por ejemplo, si $l = 223$ cm ¿Cuánto indica la expresión anterior que debe valer h? ¿Qué debe aclarar para que la expresión anterior sea correcta?

En la misma situación, supongan ahora que el costo de construir el depósito se cotiza a $100 por metro cuadrado de pared o piso construído.

6. ¿Cuánto costará construir un depósito cuya base mida 5 metros de lado?
7. Determinen el costo de construir un depósito de altura h y lado de la base l (ambas medidas en metros).
8. ¿Cuánto costará construir un depósito con $l = 1$m? ¿Y con $l = 1,5$m ?
9. Expresen el costo de construir un depósito cuya base mide l metros de lado. ¿Para qué valores de l es válida la expresión obtenida?

10 ¿Es más barato construir un depósito de base pequeña y altura grande, o bien uno de base grande y altura pequeña?

11. ¿Cómo harían para decidir las medidas del depósito para gastar lo menos posible?

1.2 Funciones numéricas

En la situación anterior determinamos la superficie total del depósito -llamémosla S- **en función** de la longitud del lado de la base l. Cuando medimos las longitudes en metros, obtuvimos la expresión:

$$S = l^2 + \frac{144}{l} \text{ para } l > 0$$

Esta forma de pensar la situación del depósito nos permitió efectuar un análisis del problema del costo mínimo, aunque todavía no estamos en condiciones de resolverlo completamente.

Definición

Una **función** es una relación entre dos magnitudes x e y llamadas respectivamente *variable independiente* y *variable dependiente* tal que a cada valor de x le corresponde un único valor de y.

Podemos decir entonces, que S es una función con variable independiente l y variable dependiente $S = S(l)$

La expresión $S = S(l)$ que indica que la magnitud S depende de (o está determinada por) la magnitud l se lee: "ese es igual a ese de ele".

Durante la primera parte de este curso trataremos con funciones en las que tanto la variable independiente como la variable dependiente son números reales. A éstas las llamamos **funciones numéricas**.

EJERCICIOS

Las siguientes expresiones establecen una relación entre dos magnitudes numéricas, x e y. Digan en cada caso si la relación es una función, y en ese caso identifiquen la variable independiente y la variable dependiente.

1. $y = 2 + x$
2. $y + x = 4$
3. $x < y$
4. $x^2 = y^2$
5. $x = \pm\sqrt{y}$
6. $xy = 1$
7. $y = x^2$
8. $x^2 + y^2 = 1$

Cuando existe una relación funcional entre las magnitudes x e y, variables independiente y dependiente respectivamente, esta situación se expresa escribiendo:

$$y = y(x)$$

EJEMPLO

1. $y(x) = 2 + x$
2. $y(x) = 4 - x$
3. Si y es el área de un círculo y x es la longitud de su radio, entonces $y = y(x)$. Explícitamente, en este caso se tiene $y(x) = \pi x^2$.

Supongamos que $y(x)$ es una función numérica (en lo sucesivo diremos simplemente "una función"). Una forma muy usual de trabajar con ella es pensarla como una regla, procedimiento o expresión que a cada valor de la variable independiente x (para el cual la regla, procedimiento o expresión es aplicable), le asocia un valor $y(x)$ perfectamente definido.

EJEMPLO

Las siguientes son funciones numéricas:

a) $y(x) = x^2 + \dfrac{144}{x}$ b) $y(x) = \sqrt{x-1}$ c) $y(x) = 3$

1.3 Dominio de una función numérica

Nuestra definición establece que si $y = y(x)$ es una función, debe existir un único valor de y asociado con x. Puede suceder, sin embargo, que no todo valor de x tenga un valor de y asociado. Por ejemplo $y = \sqrt{x}$ es una función que no está definida para valores de la variable x que sean menores que 0.

Definición

Dada una función $y = f(x)$ se llama **dominio de f** al conjunto de todos los valores de la variable independiente x para los cuales la función está definida. Dicho conjunto se denota $Dom(f)$.

EJERCICIOS

Para cada una de las funciones del Ejemplo 3 determinen para qué valores de la variable independiente están definidas.

En general, el dominio de una función no se da explícitamente, sino que queda determinado por el contexto en el que la función aparece y/o por las restricciones de las operaciones algebraicas que se usan.

Restricciones por operaciones algebraicas

Recordemos que existen las siguientes restricciones al operar con números reales:

- No es posible la división por 0. Esto puede expresarse de la siguiente manera: si a y b son dos números reales, el cociente $\frac{a}{b}$ está definido siempre que b sea diferente de 0.
- No es posible extraer raíces de índice par de números negativos. Esto es: si n es par, la raíz n-ésima de a está definida siempre que a sea un número mayor o igual que 0.

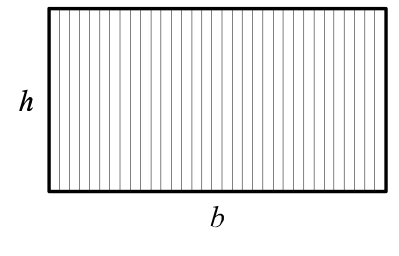
EJEMPLO

1. El dominio de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ es Dom(f)=$\{x \in \mathbf{R}/x > 0\}$, ya que $\sqrt{x}$ está definida para $x \geqslant 0$ pero se encuentra como denominador de la función, luego debe ser $\sqrt{x} \neq 0$ y por lo tanto $x \neq 0$.
2. En la Actividad de la página 9 se llegó a la construcción de la función $S(l) = l^2 + \frac{144}{l}$, aquí podemos ver que la única restricción algebraica sería $l \neq 0$ puesto que no es posible la división por 0.

Restricciones impuestas por el contexto

ACTIVIDAD

Un rectángulo tiene 1000 m de perímetro. Se trata de hallar el área de ese rectángulo en función de la longitud de uno de sus lados. Llamemos b a la longitud de uno de los lados, y h a la longitud del otro (ver figura).



Perímetro $= 2b + 2h = 1000$

1. Encuentren la expresión de la altura h en función de la longitud del lado b.
2. Teniendo en cuenta que $Área = bh$ den una expresión del área en términos únicamente de la longitud del lado b.
3. Expresen lo obtenido como una relación funcional:

   $A(b) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
4. Determinen el dominio de $A(b)$ teniendo en cuenta el contexto de esta situación.

EJEMPLO

Si observamos nuevamente la Actividad de la página 9, veremos que el contexto nos obliga a tener en cuenta magnitudes positivas puesto que la variable l en $S(l) = l^2 + \dfrac{144}{l}$ alude a la medida de un lado. En esta situación el dominio de la función $S(l)$ son todos los números positivos.

En resumen, para determinar el dominio de una función deben tenerse en cuenta:

- Las restricciones impuestas por las operaciones algebraicas.
- Las restricciones determinadas por el contexto.
- Las restricciones arbitrarias.

EJERCICIOS

Determinen los dominios de:

1. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$
2. La función que mide el área de un círculo cuando el diámetro es menor que 88.
3. $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 4}$
4. La función que mide el costo total de una compra de x cantidad de sachets de leche con un costo unitario de $2,10.
5. La función que mide el costo total de una compra de x cantidad de kilos de pan con un costo por Kg. de $4,35.

Dominio e igualdad entre funciones

ACTIVIDAD

Consideren las funciones:

a) $f(x) = x + 1$ b) $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

1. Completen la tabla siguiente

x	3	$\frac{1}{5}$	0	1
$f(x)$				
$g(x)$				

2. ¿Son iguales las funciones f y g ?
3. Determinen el dominio de cada una de las funciones.
4. Grafiquen a ambas funciones.

Podemos concluir, en base a la actividad anterior que **dos funciones son iguales si sus dominios son iguales y toman los mismos valores**.

EJERCICIOS

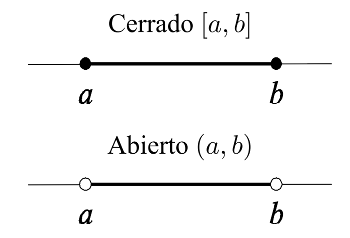
1. Expresen el perímetro de un cuadrado en función de la longitud L de su lado.
2. Expresen el costo de L lámparas si cada una vale $\$4$.
3. ¿Las dos funciones anteriores son iguales? ¿De qué manera influye el dominio de cada una?

Intervalos

Recordemos que el dominio de toda función es un conjunto, más precisamente es el conjunto de todos los valores de la variable independiente para los cuales la función está definida. Para las funciones numéricas, el dominio es un subconjunto de los números reales, y para muchas de esas funciones sus dominios pueden ser descriptos en términos de ciertos conjuntos particulares de la recta real llamados intervalos.

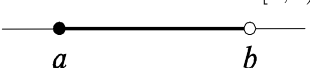
Intervalos:

Cerrado $[a, b]$

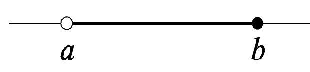


Abierto (a, b)

Semiabierto a la derecha $[a, b)$



Semiabierto a la izquierda $(a, b]$

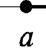


Un intervalo es el conjunto formado por todos los números reales comprendidos entre dos números reales dados. Más precisamente, dados dos números reales a y b, con $a < b$ se definen los siguientes conjuntos:

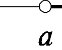
- $[a, b] = \{x / a \leq x \leq b\}$ se denomina **intervalo cerrado** de extremos a y b.
- $(a, b) = \{x / a < x < b\}$ se denomina **intervalo abierto** de extremos a y b.
- $[a, b) = \{x / a \leq x < b\}$ se denomina **intervalo semiabierto a la derecha** de extremos a y b.
- $(a, b] = \{x / a < x \leq b\}$ se denomina **intervalo semiabierto a la izquierda** de extremos a y b.

Semirrectas:

Hacia la derecha cerrada $[a, \infty)$



Hacia la derecha abierta (a, ∞)



Si incorporamos los símbolos $+\infty$ y $-\infty$ podemos usar la notación de intervalos para describir semirrectas:

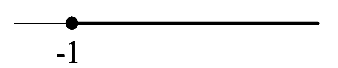
- $[a, +\infty) = \{x / a \leq x\}$ se denomina **semirrecta hacia la derecha cerrada** con origen a.
- $(a, +\infty) = \{x / a < x\}$ se denomina **semirrecta hacia la derecha abierta** con origen a.

EJERCICIOS

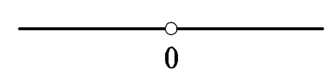
Describan los siguientes conjuntos: $(-\infty, a]$ y $(-\infty, a)$. ¿Cómo los llamarían?

EJEMPLO

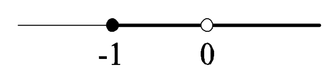
1. Queremos determinar el dominio de la función $f(x) = \sqrt{x+1} + \frac{1}{x}$. Para ello notamos que:
   a. $\sqrt{x+1}$ está definida para $x \geq -1$, o sea en la semirrecta $[-1, +\infty)$



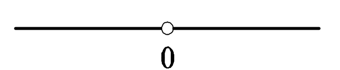
   b. Mientras que $\frac{1}{x}$ lo está para $x \neq 0$.



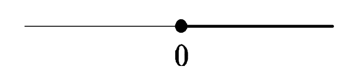
   c. Por lo tanto, $f(x)$ estará definida en los intervalos: $[-1, 0) \cup (0, +\infty)$



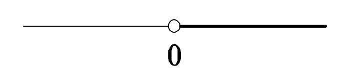
2. Si queremos determinar el dominio de $S(l) = l^2 + \frac{144}{l}$ y recordamos que es la función que obtuvimos en el desarrollo de la Actividad de la página 9, tendremos en cuenta que:
   a. l^2 no tiene restricción de tipo algebraica.
   b. La única restricción algebraica será $l \neq 0$ en $\frac{144}{l}$, puesto que no es posible la división por 0.



   c. El contexto nos obliga a tomar magnitudes mayores o iguales que 0, puesto que la variable l alude a la medida de un lado.



   d. Por lo tanto, $S(l)$ estará definida en el intervalo $(0, +\infty)$:



EJERCICIOS

1. Escriban los siguientes conjuntos de números en términos de intervalos. Interpreten gráficamente.
   a. $\{x \;/\; 2x - 3 < 0\}$

b. $\left\{x \;/\; \dfrac{1}{x} < 1\right\}$

c. $\{x \;/\; x^2 \leq 2\}$

d. $\{x \;/\; x^2 > 2\}$

2. Determinen el dominio de las siguientes funciones. Escríbanlos utilizando la notación de intervalos.

a. $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

b. $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}\sqrt{2 - x}$

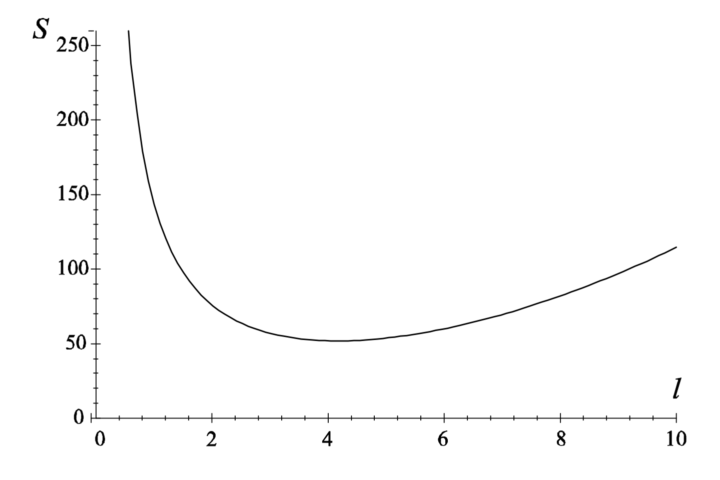
c. $h(x) = \dfrac{\sqrt{-2x + 3}}{\sqrt{2 - x}}$

d. $k(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

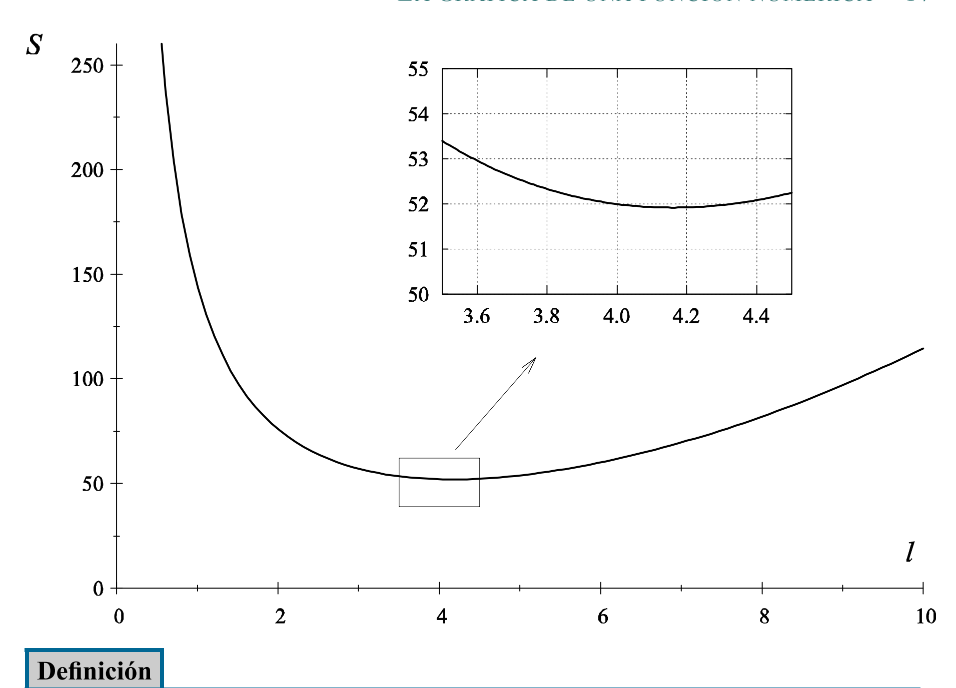
1.4 La gráfica de una función numérica

Una función numérica tiene siempre asociada una gráfica. Esa gráfica es un dibujo que permite visualizar el comportamiento de la función y es de suma utilidad para obtener conclusiones acerca de ella. Por ejemplo, la gráfica de:

$$S(l) = l^2 + \frac{144}{l} \quad \text{para} \quad l > 0 \text{ es la siguiente:}$$



La ampliación del sector nos permite estimar con bastante precisión el valor de la longitud de la base que hará mínima la superficie ¿Cuánto dirías que vale?



Definición

La **gráfica de una función numérica** $f(x)$ es el conjunto de puntos del plano cuyas coordenadas son de la forma $(x, f(x))$ con x perteneciente al dominio de f.

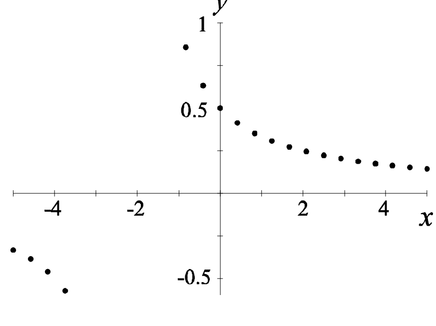


Figura 1

Dicho de otra manera: un punto del plano pertenece a la gráfica de f siempre y cuando su primera coordenada x esté en el dominio de f y su segunda coordenada sea igual a $f(x)$.

Tengamos en cuenta que mientras el dominio de una función es un subconjunto de la recta numérica (formado por todos los números para los cuales la función está definida), la gráfica de la función es un subconjunto del plano.

No existe una manera certera y precisa para construir la gráfica de una función numérica cualquiera. Sin embargo, elaborando tablas de valores podremos obtener gráficos aproximados. Una tabla de valores ubica en el plano una cierta cantidad de puntos que pertenecen a la gráfica pero, lamentablemente, todos separados.

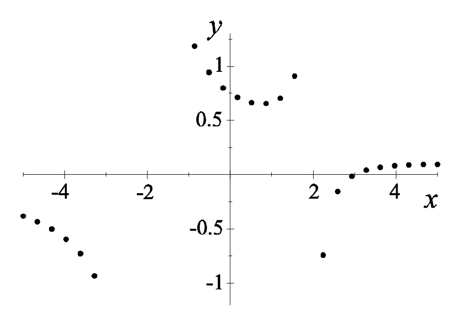


Figura 2

EJEMPLO

1. En la figura 1 del margen dibujamos algunos puntos de la gráfica de $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$
   a. ¿Cómo unirían dichos puntos?
   b. ¿Qué harían con los valores que no están en el dominio?
2. En la figura 2 del margen dibujamos algunos puntos de la gráfica de $f(x) = \frac{x-3}{x^2-4}$
   a. ¿Cómo unirían dichos puntos?
   b. ¿Qué harían con los valores que no están en el dominio?

EJERCICIOS

Para poder visualizar cómo son realmente las gráficas de las funciones de los ejemplos anteriores, ingresen en el Maple las siguientes sentencias:

>plot((x-2)/(x^2-4),x= $-5..5$,y=-2..2,discont=true);

>plot((x-3)/(x^2-4),x= $-5..5$,y=-2..2,discont=true);

1.5 Algunas funciones y sus gráficas

En esta sección repasaremos algunas funciones importantes. Comenzaremos con los polinomios.

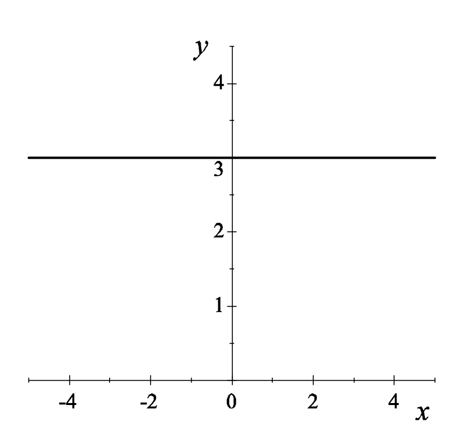
Funciones polinomiales

Definición

Una función $f(x)$ se dice una **función polinomial de grado n** (donde n es un número natural ó 0) si está definida por una expresión del tipo:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \qquad \text{con } a_n \neq 0$$

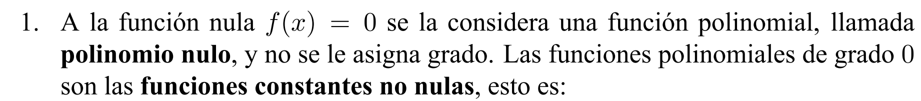
El dominio de una función polinomial es siempre el conjunto de todos los números reales.



La gráfica de $f(x) = 3$



EJEMPLO



Según el grado podemos describir algunas funciones polinomiales

1. A la función nula $f(x) = 0$ se la considera una función polinomial, llamada **polinomio nulo**, y no se le asigna grado. Las funciones polinomiales de grado 0 son las **funciones constantes no nulas**, esto es:

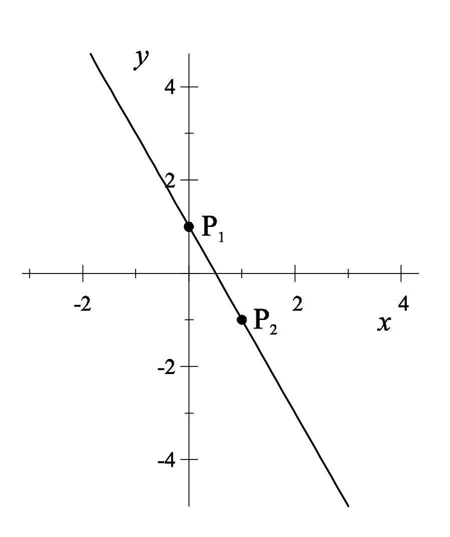
$$f(x) = a \quad \text{con } a \neq 0$$

La gráfica de una función constante es una *recta paralela al eje x*, que pasa por el punto de coordenadas $(0, a)$.

2. Las funciones polinomiales de grado 1 son las **funciones lineales**, esto es:

$$f(x) = ax + b \qquad \text{con } a \neq 0$$

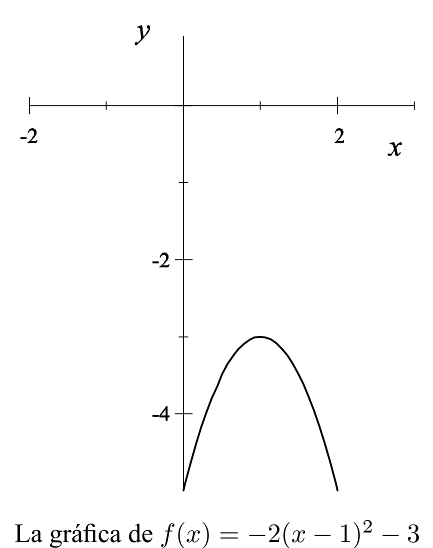
La gráfica de una función lineal es una *recta*. Notemos que para graficar una recta basta con calcular dos valores. Para graficar la función lineal $f(x) = -2x + 1$, calculemos dos puntos de la recta. Consideremos $x = 0$, obtenemos $f(0) = 1$ y tomando $x = 1$ se tendrá $f(1) = -1$. Así, la gráfica de la función será la recta que pasa por los puntos $P_1(0, 1)$ y $P_2(1, -1)$, como se muestra en la figura.



La recta que pasa por P_1 y P_2

¿Qué pueden decir acerca del significado geométrico del coeficiente de x en la expresión de una función lineal?

3. Las funciones polinomiales de grado 2 son las **funciones cuadráticas**:
$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{con } a \neq 0$$
la gráfica de una función cuadrática es una *parábola*. Estará abierta hacia arriba si $a > 0$ ó hacia abajo si $a < 0$.



La gráfica de $f(x) = -2(x-1)^2 - 3$

Para obtener la gráfica es conveniente conocer las coordenadas del vértice, así como las raíces de la ecuación cuadrática asociada (si las hubiera). Una forma para encontrar estos elementos es "completar el cuadrado": Por ejemplo, $f(x) = -2x^2 + 4x - 5$ es una función cuadrática, cuya gráfica será una parábola. Para hallar sus elementos, completemos cuadrados:
$$f(x) = -2x^2 + 4x - 5 = -2(x^2 - 2x + \frac{5}{2}) = -2(x^2 - 2x + 1 - 1 + \frac{5}{2})$$
$$f(x) = -2(x-1)^2 - 2.\frac{3}{2} = -2.(x-1)^2 - 3$$
Por lo tanto, el punto de coordenadas $(1, -3)$ es el vértice de la parábola, -2 nos indica que estará abierta hacia abajo y podemos buscar las raíces de la ecuación cuadrática haciendo $-2(x-1)^2 - 3 = 0$, es decir $-2(x-1)^2 = 3$ y por lo tanto $(x-1)^2 = -\frac{3}{2}$ lo que nos dice que no existen raíces reales asociadas a esta ecuación, luego la gráfica no podrá "tocar" el eje x (lo cual era claro por la posición del vértice y el sentido de apertura de la parábola).

En general, para $f(x) = ax^2+bx+c$ con $a \neq 0$ se tendrá al completar cuadrados: $f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 + c - \frac{b^2}{4a}$, donde el punto de coordenadas $\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$ es el vértice de la parábola.

Dejaremos para más adelante la descripción de las gráficas de funciones polinomiales generales de grados mayores que 2.

EJERCICIOS

1. **Ecuación de la recta por dos puntos**. Supongamos que L es una recta que pasa por los puntos de coordenadas (x_1, y_1) y (x_2,y_2) .
   a. Supongan que L es una recta horizontal (dibuje). ¿Cómo son y_1 e y_2?¿Cuál es la ecuación cartesiana de L?
   b. Supongan que L es una recta vertical (dibuje). ¿Cómo son x_1 e x_2?¿Cuál es la ecuación cartesiana de L?
   c. Supongan ahora que L no es vertical ni horizontal. Mediante un dibujo, muestren que la pendiente de L es:
   $$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
   y m es diferente de 0.

d. Muestren que la ecuación cartesiana de la recta de pendiente m que pasa por (x_1, y_1) es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

a la ecuación anterior se la llama **ecuación punto-pendiente** de la recta.

e. Combinando los incisos c. y d. obtenemos la **ecuación punto-punto** de la recta: $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

2. En la tabla siguiente L es la recta que pasa por los puntos P y Q. Completen:

P	Q	pendiente de L	ecuación punto pendiente de L
$(3, 1)$	$(-2, 5)$		
$(-8, 5)$	$(-3, 2)$		
$(1, 3)$	$(5, \quad)$	-3	
$(1, 3)$	$(\quad, 5)$	4	
$(1, \quad)$	$(\quad, -3)$		$y + 1 = -6(x - 4)$

3. Expliquen por qué la gráfica de una función lineal, que es una *recta*, no es horizontal ni vertical.

4. Si $f(x) = mx + b$ es una función lineal ¿Qué interpretación tienen m y b en la gráfica de f? Grafiquen las siguientes funciones lineales:

a. $f(x) = \dfrac{x - 2}{3}$

b. $f(x) = -4x + 7$

5. Digan si las siguientes son funciones constantes, lineales, cuadráticas o ninguna. Justifiquen y grafiquen.

a. $f(x) = -\sqrt{2}x - \dfrac{1}{3}$

b. $f(x) = 3$

c. $f(x) = 0.x - 1$

d. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$

e. $f(x) = -7 + \dfrac{1}{3}x^2$

f. $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$

g. $f(x) = (x + 3)^2$

h. $f(x) = \dfrac{6x - 3}{8}$

Funciones racionales

Definición

Una función numérica definida por un cociente de polinomios se denomina **función racional**. Es decir una función racional es del tipo:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios y $q(x)$ no es el polinomio nulo.

Observemos dos cuestiones importantes:

- Una función racional $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ está definida siempre que el denominador no se anule. Por lo tanto el dominio de f es el conjunto $\{x/q(x) \neq 0\}$
- Recordemos que una fracción es nula solamente en el caso de que su numerador sea nulo. Por lo tanto la función $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ se anulará en un número a siempre que a esté en el dominio de f y que $p(a) = 0$. En tal caso diremos que a **es un cero de** f.

EJEMPLO

Encontrar el dominio y los ceros de la función racional

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x}{x^2 + x}$$

Dominio: Es el conjunto de números en los cuales el denominador no se anula. Para conocerlo, encontramos los valores que anulan al denominador resolviendo la ecuación:

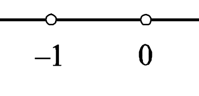
$$x^2 + x = 0$$

factoreando queda

$$x(x + 1) = 0$$

las raíces son entonces

$$x = 0 \text{ y } x = -1$$



El dominio de $f(x)$

Tenemos que:

$$Dom(f) = \{x/x \neq 0 \text{ y } x \neq -1\}$$

En la notación de intervalos:

$$Dom(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty)$$

Ceros de f: Como ya se dijo, f se anulará en aquellos números de su dominio en los que se anule su numerador. Para encontrarlos resolvemos la ecuación

$$\begin{aligned} x^3 - 2x &= 0 \\ x(x^2 - 2) &= 0 \end{aligned}$$

sus soluciones son

$$x = 0 \ ; \ x = \sqrt{2} \ ; \ x = -\sqrt{2}$$

Debemos excluir a $x = 0$ puesto que no pertenece al dominio de f.

Por lo tanto los ceros de f serán: $x = \pm\sqrt{2}$

EJERCICIOS

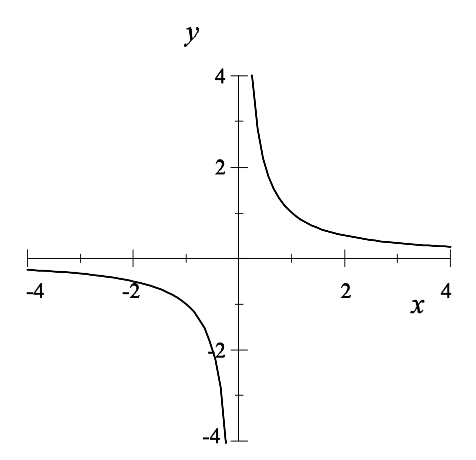
Comprobar lo hecho antes graficando la función con Maple.

Funciones homográficas. Hipérbolas

La gráfica de la función

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

es una curva llamada **hipérbola**. Su gráfica (que podemos construir con una tabla de valores adecuada) es la siguiente:



EJERCICIOS

1. Grafiquen las siguientes funciones, a partir del gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x}$
   a. $f(x) = -\dfrac{1}{x}$
   b. $g(x) = \dfrac{3}{x}$
   c. $h(x) = -\dfrac{1}{2x}$
2. ¿Cómo es en general la gráfica de una función de la forma a/x? ¿Cómo influye a en la forma de la gráfica?

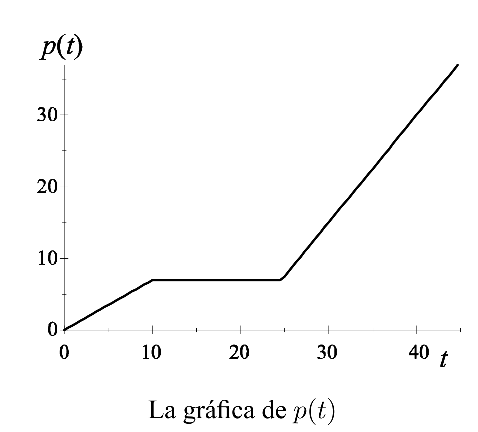
3. Grafiquen las funciones:
   a. $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$
   b. $g(x) = \dfrac{1}{x-4}$
4. ¿Cómo es en general la gráfica de una función de la forma $\dfrac{1}{x+b}$? ¿Cómo influye b en la forma de la gráfica?
5. Grafiquen las funciones:
   a. $f(x) = \dfrac{1}{x} - 1$
   b. $f(x) = \dfrac{1}{x-4} + 2$
6. ¿Cómo es en general la gráfica de una función de la forma $c + \dfrac{1}{x}$? ¿Cómo influye c en la forma de la gráfica?

Funciones definidas a trozos

EJEMPLO

Un automóvil pasa por el pueblo A a una velocidad constante de 42 km/h . Diez minutos más tarde se detiene en una estación de servicio por 15 minutos y luego sigue su viaje a 90 km/h durante otros 20 minutos. Exprese la distancia desde el auto hasta el pueblo como función del tiempo t medido en minutos.

1. Considere $t = 0$ como el instante en que el auto pasa por A.
2. Llamemos $p(t)$ a la distancia desde el auto al pueblo en el instante t.



La gráfica de $p(t)$

- Tendremos que durante los primeros diez minutos
$$p(t) = 42 \cdot \frac{t}{60}\ km$$
- En los quince minutos siguientes:
$$p(t) = 42 \cdot \frac{10}{60} km = \frac{42}{6} km = 7km$$
- Y en los últimos veinte minutos:
$$p(t) = 7 + \frac{90}{60}(t-25)\ km = 7 + \frac{3}{2}(t-25)\ km = \frac{3}{2} \cdot t - \frac{61}{2}\ km$$
- Resumimos lo dicho escribiendo a $p(t)$ como una **función definida a trozos**:
$$p(t) = \begin{cases} \frac{42}{60}t & 0 \le t \le 10 \\ 7 & 10 < t \le 25 \\ \frac{3}{2}t - \frac{61}{2} & 25 < t \le 45 \end{cases}$$

.

EJERCICIOS

1. Determinen el dominio de las siguientes funciones y grafiquen

   a. $h(x) = \begin{cases} -x & x \leq 0 \\ x^2+1 & 0 < x < 2 \\ -x+7 & 2 \leq x \end{cases}$

   b. $f(x) = \begin{cases} 2x+6 & x \leq -1 \\ \dfrac{1}{x} & -1 < x \leq 1 \\ 3+\dfrac{1}{x+1} & 2 < x \end{cases}$

   c. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{3x+9}{x^2-9} & -5 \leq x \leq 0 \\ 7 & 0 < x \leq 2 \\ \dfrac{1}{x-2} & 2 < x \leq 4 \end{cases}$

2. A partir de las funciones dadas en el ejercicio anterior, determinen si es posible hallar:

   a. $f(3)$ b. $f(3/2)$ c. $g(-1)$
   d. $g(-3)$ e. $f(0)$ f. $g(2)$
   g. $f(1)$

3. Decidan si las siguientes son funciones y en caso afirmativo, grafiquen

   a. $f(x) = \begin{cases} 2x+6 & x \leq -1 \\ \dfrac{1}{x} & -1 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{3}{6}+\dfrac{1}{x+1} & 1 \leq x \end{cases}$

   b. $g(x) = \begin{cases} 5x & x \leq 4 \\ \sqrt{x+75} & 5 \leq x \leq 6 \\ x+\sqrt{x+3} & 6 \leq x \end{cases}$

Para definir funciones a trozos con Maple se usa el comando `piecewise`, que tiene el siguiente formato:

piecewise(condición_1, expr_1,condición_2,expr_2,...,condición_k,expr_k,expr_otherwise).

Por ejemplo, para definir la función del ejercicio anterior el comando puede ser:

piecewise(x<=4,5*x,5<=x and x<=6,sqrt(x+75),x>=6,x+sqrt(x+3))

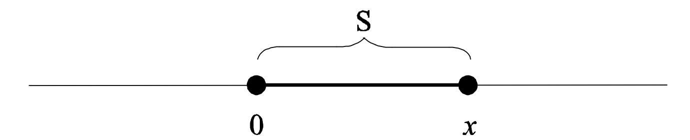
Para graficar la función se usa el comando `plot` poniendo como primer argumento lo anterior.

La función valor absoluto

Dado un número x cualquiera podemos representarlo sobre una recta. El punto que representa a x junto con el origen 0 determinan un segmento S. ¿Cuál es la longitud de S?

Para responder a esa pregunta inocente, consideremos dos casos:

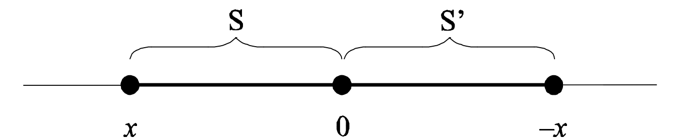
1. Supongamos que $x > 0$



en este caso, es evidente que la longitud de S es justamente x.

2. Veamos ahora qué pasa cuando $x < 0$.

No podemos decir que la longitud de S sea x puesto que éste es negativo. Pero si consideramos $-x$, el segmento S' entre 0 y $-x$ tiene la misma longitud que el segmento S.



La longitud de S es entonces $-x$.

Definición

Dado un número real x llamaremos **valor absoluto** de x a la longitud del segmento determinado sobre la recta por x y el origen 0. Lo denotamos $|x|$.

De acuerdo a la discusión hecha más arriba, podemos expresar a la función valor absoluto como una función definida a trozos:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

EJERCICIOS

1. ¿Cuál es el dominio de $|x|$?
2. Grafiquen la función $|x|$.
3. Dibujen en la recta los conjuntos definidos por cada una de las condiciones siguientes. De ser posible, escríbanlos usando intervalos
   a. $\{x \epsilon R : |x| < 3\}$
   b. $\{x \epsilon R : |x| \leq 4\}$
   c. $\{x \epsilon R : |x| > 5\}$

d. $\{x\epsilon R : |x| < 0\}$

e. $\{x\epsilon R : |x| \leq 0\}$

f. $\{x\epsilon R : |x| = 0\}$

4. Sea $a > 0$ ¿qué tipo de intervalos son los siguientes conjuntos? descríbanlos gráficamente y con notación de intervalos.

   a. $A = \{x \in R : |x| < a\}$

   b. $B = \{x \in R : |x| \leq a\}$

   c. $C = \{x \in R : |x| > a\}$

   d. $D = \{x \in R : |x| \geq a\}$

   e. Describan los conjuntos A, B, C y D teniendo en cuenta si $a = 0$ y $a < 0$

5. Sean x e y dos números reales cualesquiera, y sea S el segmento sobre la recta cuyos extremos son x e y. Completen la siguiente tabla:

x	y	longitud de S	x	y	longitud de S
-1	0		a	0	
-3	-7		$-a$	0	
5	1		0	$-a$	
1	5		a	b	

6. En las mismas condiciones del ejercicio anterior muestren que la longitud de S es igual a $|x - y|$.

7. Muestren que $|x| = |-x|$

8. Dibujen en la recta los conjuntos definidos por cada una de las siguientes condiciones. De ser posible, escríbanlos usando intervalos:

   a. $\{x\epsilon R : |x - 1| < 3\}$

   b. $\left\{x\epsilon R : |x + 2| \leq \frac{1}{2}\right\}$

   c. $\left\{x\epsilon R : \left|x - \frac{1}{3}\right| > 5\right\}$

   d. $\left\{x\epsilon R : |x + 8| \geq \frac{2}{3}\right\}$

   e. $\{x\epsilon R : |x - 2| \leq -1\}$

   f. $\{x\epsilon R : |x + 1| \geq -2\}$

9. Sean a y b dos números: ¿Qué conjunto define la condición $|x - a| < b$?

10. Muestren gráficamente que $\left\{x/ x^2 < a\right\} = \{x/ |x| < \sqrt{a}\}$ para cualquier $a > 0$.

Ejercicios de repaso para el Capítulo 1

EJERCICIOS

1. Una planta tiene capacidad para producir de 0 a 100 heladeras diarias. Los gastos generales fijos de la planta son $\$2200$ diarios y el costo directo (material y mano de obra) para producir una heladera es de $\$151$.
   a. Escriban una fórmula para $T(x)$ el costo de producir x heladeras al día, y para $U(x)$ el costo unitario por heladera.
   b. ¿Cuáles son los dominios de esas funciones?
2. ¿Cuáles de las siguientes expresiones definen una función de x? Justifiquen.
   a. $2x^2 + y^2 = 5$
   b. $xy + y + 3x = 3$
   c. $x^2 = 3y + 1$
3. Expliquen por qué los puntos $(4, 2)$ y $(4, -1)$ no pueden pertenecer a la gráfica de alguna función.
4. Sea p el perímetro de un triángulo equilátero. Encuentren la fórmula $A(p)$ que representa el área de dicho triángulo.
5. ¿Qué tipo de restricciones deben tenerse en cuenta para determinar el dominio de una función? Expliquen cada caso y ejemplifiquen.
6. Determinen el dominio de las siguientes funciones. Escríbanlo utilizando la notación de intervalos.
   a. $f(x) = \sqrt{1-3x}$
   b. $g(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$
   c. $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2-x}} + \sqrt{-x+8}$
   d. $k(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4}$
   e. $l(x) = \sqrt{x-8} + \sqrt{5-x}$
   f. $m(t) = \begin{cases} \frac{2}{3}\cdot t & 0 \leq t \leq 1 \\ \sqrt{7} & 1 < t \leq 2 \\ \frac{3}{t} & 2 < t \leq 4 \end{cases}$
   g. $n(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t-3} & 0 \leq t \leq 5 \\ 2t & 5 < t \leq 10 \\ \dfrac{3}{9-t^2} & 10 < t \leq 20 \end{cases}$

h. $m(u) = \dfrac{7}{u^2 + 5u + 6}$

i. $q(r) = -5$

7. Encuentren una expresión para las funciones siguientes:

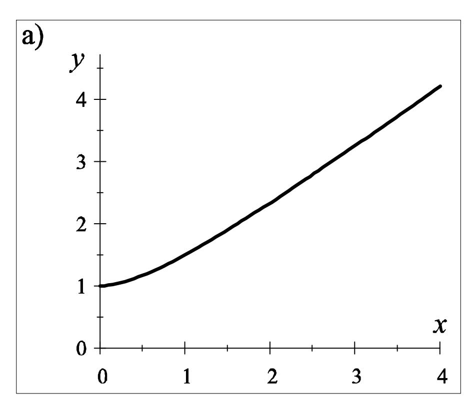
   a. La longitud de un lado de un cuadrado como función de la longitud d de la diagonal.

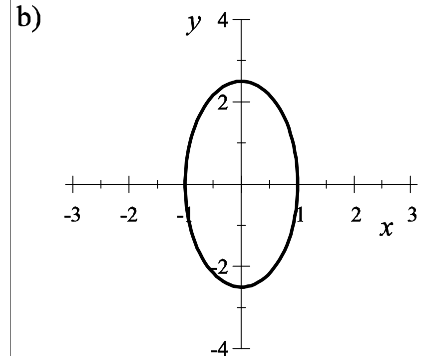
   b. El área del cuadrado como función de d.

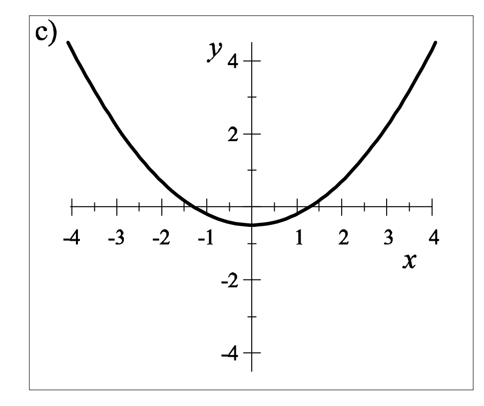
   c. Determinen el dominio de ambas funciones.

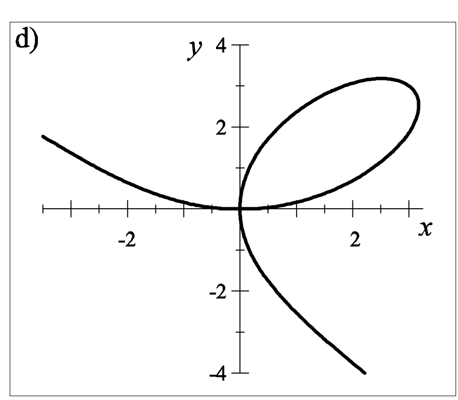
8. Den un ejemplo en forma gráfica o analítica de una función cuyo dominio sea el intervalo $[-2, 2]$ y que los valores que toma sean la unión de los intervalos$[-1, 1)$ y $[2, 4]$.

9. ¿Cuáles de las siguientes gráficas corresponden a gráficas de funciones? Justifiquen.









10. Realicen las gráficas de las siguientes funciones.

    a. $f(x) = 3x + 2$

    b. $g(x) = -x - 4$

    c. $h(x) = 2x^2 + 3x - 4$

d. $f(x) = 2$

11. ¿Para qué valor de k, la gráfica de $y = kx^3$ pasa por el punto indicado?
    a. $(1, 4)$
    b. $(-2, 1)$
    c. ¿Podrían hallar un valor de k para cualquier punto (a, b) con $a, b \in \mathbb{R}$?
12. Se sabe que el punto $(1, 2)$ satisface la ecuación $y = f(x)$. Indiquen en base al dato brindado, un punto perteneciente al dominio y uno a la gráfica de f.
13. Geométricamente, ¿qué representa $|a - b|$?
14. ¿Es posible que $|x| = -x$? Justifiquen lo que afirman.
15. Determinen el dominio de las siguientes funciones. Escríbanlo utilizando la notación de intervalos.
    a. $b(s) = \sqrt{|s^3 + 2s + 4|}$
    b. $p(y) = \left|\dfrac{y+1}{y-1}\right|$
    c. $s(t) = \dfrac{6}{\sqrt{|t-8|}}$
    d. $t(x) = \dfrac{2x}{|x+3| - |x-3|}$
16. Expresen las siguientes funciones sin emplear el símbolo de valor absoluto:
    a. $f(x) = |x + 3|$
    b. $g(x) = |x| + |x - 4|$
17. Expresen en lenguaje matemático, los siguientes enunciados:
    a. Los puntos x e y están a más de 7 unidades de distancia.
    b. La distancia entre x y -6 es menor que 3.

Capítulo 2

Derivadas

2.1 Variación total y variación media

Definición

Dada una función f definida en un intervalo $[a,b]$ la **variación total de** f **entre** a **y** b se define como la diferencia $f(b)-f(a)$.

A la variación total entre a y b se la denota $\Delta f\,[a,b]$ o simplemente Δf cuando no haya dudas acerca del intervalo considerado. Tenemos entonces:

$$\Delta f\,[a,b] = \textbf{variación total de } f \textbf{ entre } a \textbf{ y } b = f(b)-f(a)$$

Definición

La variación media se define como el cociente:

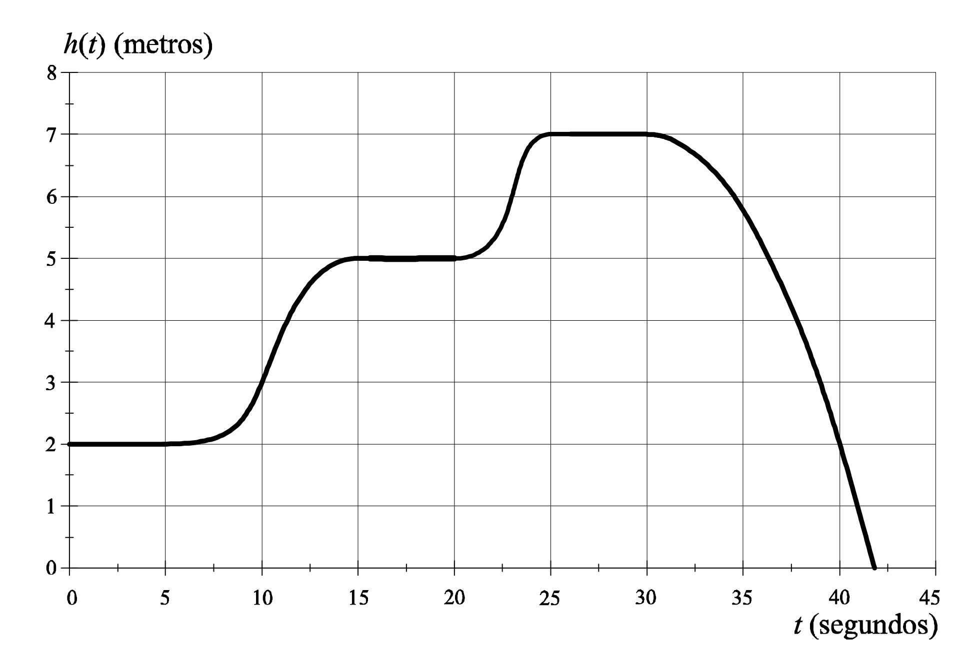
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

El número $b-a$ es la longitud del intervalo $[a,b]$. Se acostumbra a denotar esa longitud como Δx. Tenemos entonces:

$$\frac{\Delta f\,[a,b]}{\Delta x} = \textbf{variación media de } f \textbf{ entre } a \textbf{ y } b = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

ACTIVIDAD

La gráfica de la figura representa la altura h medida en metros desde el nivel del suelo, de cierto objeto que se mueve verticalmente, a medida que transcurre el tiempo t expresado en segundos



Completen la siguiente tabla a partir de la información suministrada por la gráfica

a	b	$h(b)$	$h(a)$	Variación total de h entre a y b	Variación media de h entre a y b
0	10	3	2	$3-2=1$	$1m/10s = 1/10m/s$
5	10				
5	25				
20	25				
20	40				
0	40				
30	40				
25	35				

Cuando -como en este caso- la función describe la posición de un objeto en función del tiempo, la variación total entre dos instantes a y b recibe el nombre de **desplazamiento** entre a y b, y la variación media se denomina **velocidad media** entre a y b.

1. Usando la tabla anterior consideren $a = 5$ y $b = 25$. Hagan lo siguiente:

   a. Identifiquen los puntos de la gráfica correspondientes a $a = 5$ y $b = 25$.

   b. Dibujen la recta que pasa por los puntos identificados en el inciso anterior.

   c. Usando la gráfica, calculen la pendiente de la recta dibujada y comparen el valor obtenido con la velocidad media correspondiente al intervalo $[5, 25]$.

   d. Repitan los incisos anteriores para dos intervalos más de los dados en la tabla.

   e. Concluyan que la velocidad media en un intervalo es igual a la pendiente de la recta que pasa por los puntos correspondientes en la gráfica. A la recta que pasa por dos puntos dados de una gráfica se la denomina **recta secante** a la gráfica por dichos puntos.

2. ¿Es cierto que la velocidad del objeto entre $t = 5s$ y $t = 15s$ fue de $0.3m/s$? Justifiquen su repuesta.

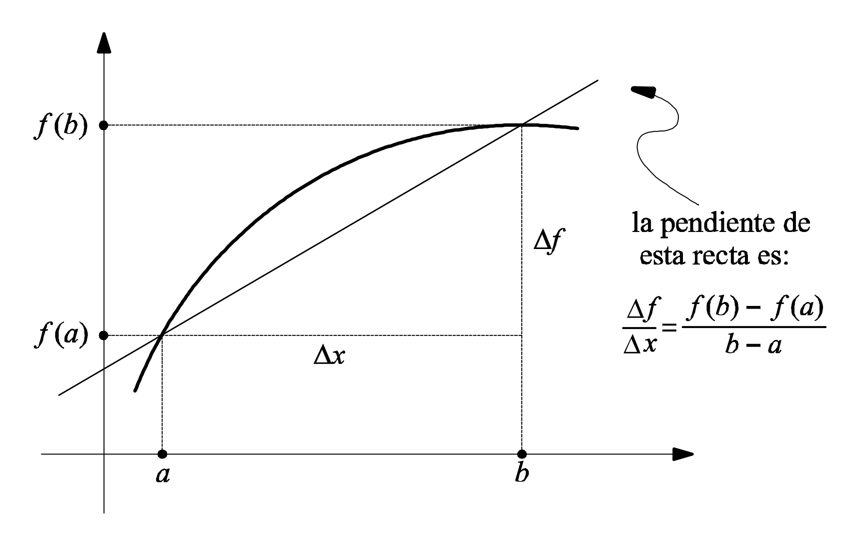
3. Cuándo consideran ustedes que el objeto se movía más rápido ¿en $t = 10$ ó $t = 23$? Justifiquen su respuesta.

4. ¿Cómo harían para estimar la velocidad del objeto en $t = 35$?¿Y en un t cualquiera?

Toda función f describe el cambio de una magnitud -la variable dependiente- en términos de otra -la variable independiente- Cuando la variable independiente se mueve en cierto intervalo $[a, b]$, la variación total describe cuánto cambió f entre a y b, mientras que la variación media representa la *tasa promedio* o *razón de cambio promedio.* También, en el caso de que la función describa la posición de un objeto que se mueve en una recta, a la variación media se la denomina *velocidad media* del objeto entre a y b.

2.2 Interpretación geométrica

Geométricamente, la variación media de f entre a y b se interpreta como la pendiente de la recta secante a la gráfica de f entre los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. En el dibujo:



Recordando cómo es la ecuación de la recta con pendiente dada y que pasa por un punto dado, podemos escribir la ecuación de esa secante de esta forma:

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

o, más sintéticamente:

$$y - f(a) = \frac{\Delta f}{\Delta x}(x - a)$$

.

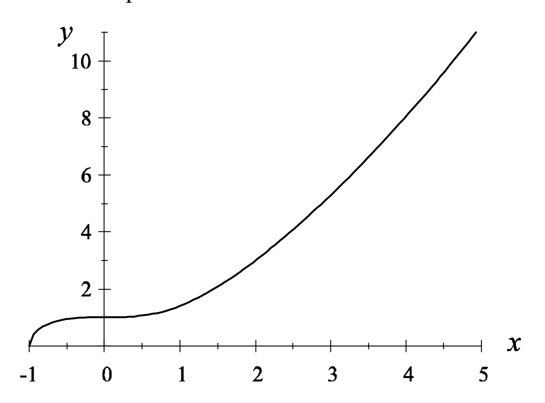
.

EJERCICIOS

1. Consideren la función $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$
   a. Calculen la variación media de f entre a y b en los siguientes casos:

a	b
-1	1
1	-1
0	-1
0	2
-1	2

   b. Encuentren la ecuación de la recta secante a la gráfica de la función para cada uno de los casos en los que calcularon la variación media.
   c. La siguiente es la gráfica de la función f. Sobre la misma gráfica dibujen las rectas halladas en el punto anterior.



2. Para las siguientes funciones de posición, calculen las velocidades medias entre los instantes que se indican. Grafiquen las funciones cerca de esos valores y tracen las rectas secantes. Encuentren las ecuaciones de esas rectas.

	$p(t)$	t_1	t_2	velocidad media	ecuación de la recta secante
1	$3t+1$	-2	0		
2	$3t+1$	a	b		
3	$-t^2$	1	3		
4	$\sqrt{t}$	1	3		
5	$\sqrt{t}$	1	a		
6	t^3-2	0	4		

3. La concentración de cierto fármaco en el flujo sanguíneo t horas después de ser inyectado por vía intramuscular es

$$C(t) = \frac{300t}{27 + t^3}$$

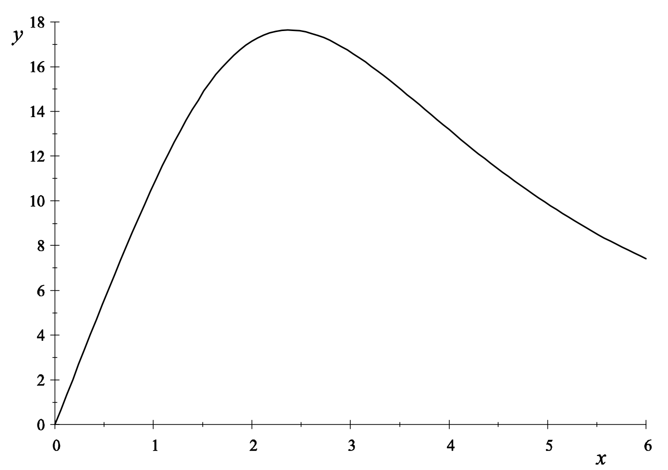
   a. Completen la siguiente tabla:

t (horas)	0	1	2	3	4	5	6
C							

b. Calculen la variación promedio de la concentración en cada intervalo de tiempo.

c. Si se sabe que para ser efectivo el tratamiento la concentración del fármaco no debe ser inferior a 11 ¿Podrían estimar cuándo administrar la siguiente dosis?

d. La gráfica de la función C está en la figura. Marquen los puntos correspondientes a los valores de la tabla y tracen los segmentos de recta entre un punto y el siguiente ¿Cuál es la ecuación de cada recta?

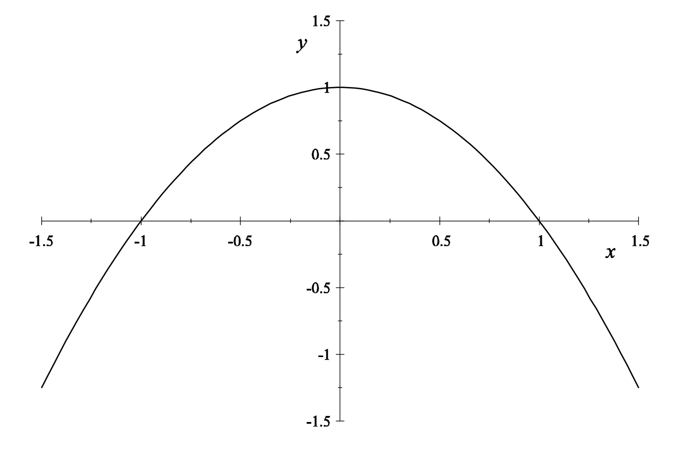


e. Usando la gráfica ¿La estimación dada en el punto c. fue buena o mala? Expliquen su respuesta.

4. Consideremos la función $f(x) = -x^2 + 1$. Nos paramos en el punto -1 del eje horizontal, y consideramos la variación promedio de f entre -1 y x para un valor cualquiera de x situado a la derecha de -1.

   a. Encuentren la expresión de la variación media de f entre -1 y x. Como verán es una nueva función de x. Llamémosla $V(x)$.

   b. Geométricamente ¿Qué representa $V(x)$? Interprétenlo en la gráfica:



   c. ¿Cuál es el dominio de la función $V(x)$?

d. Hagan un gráfico de $V(x)$.

e. Si bien $V(-1)$ no está definido ¿Qué valor sería natural asignarle según la gráfica?

f. En la gráfica de f dibujen la recta de pendiente 2 que pasa por $(-1,0)$ ¿Cómo es esa recta respecto de la curva?

2.3 Modelos lineales

Recordemos que una función lineal es de la forma $f(x) = mx + b$ con $m \neq 0$. Consideremos un intervalo cualquiera $[x_1, x_2]$ y calculemos la variación media de f entre x_1 y x_2. La variación total es:

$\Delta f = f(x_2) - f(x_1) = mx_2 + b - (mx_1 + b) = mx_2 - mx_1 + b - b = m(x_2 - x_1)$

Por otro lado la variación en la variable independiente es:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

Entonces tendremos que la variación media de f entre x_1 y x_2 es:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{m(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = m$$

Hemos demostrado el siguiente enunciado:

Teorema

La variación media de una función lineal $f(x) = mx + b$ es igual al coeficiente m, cualquiera sea el intervalo considerado.

La recíproca del Teorema anterior también es cierta. Vamos a enunciarla:

Teorema

Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo I, tal que la variación media de f es igual a un número fijo $m \neq 0$, independientemente del intervalo que se considere. Entonces f es una función lineal en el intervalo I.

Demostración:

Consideremos un número fijo a perteneciente al intervalo I y sea x cualquier otro valor en I. La variación media entre a y x es, por hipótesis, igual a m:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = m$$

por lo tanto

$$f(x) - f(a) = m(x - a)$$
$$f(x) = m(x - a) + f(a)$$

y como $m \neq 0$, f resulta lineal en I.

Encontramos una aplicación útil de lo anterior en lo que sigue.

Movimiento uniforme

Supongamos que tenemos un objeto que se mueve sobre una recta, y que su función de posición es $r(t)$. Diremos que el objeto tiene **movimiento uniforme** en un intervalo $[a, b]$ si su velocidad media es siempre la misma, esto es: independiente de cuáles sean los instantes entre a y b que consideremos. De la discusión anterior encontramos que si un objeto tiene movimiento uniforme en el intervalo $[a, b]$ entonces:

- la función de posición $r(t)$ es lineal en el intervalo $[a, b]$, y por lo tanto su gráfica es una recta.
- la velocidad media en ese intervalo es igual a la pendiente de esa recta.
- si v_m es la velocidad media del objeto, y t_0 es cualquier instante entre a y b entonces la función de posición está determinada por la siguiente expresión

$$r(t) - r(t_0) = v_m(t - t_0) \quad \text{para } a \leq t \leq b$$

ACTIVIDAD

Un automóvil se desplaza por una ruta recta con movimiento uniforme. Supongamos que a las 8:30 pasó por el kilómetro 200, y diez minutos más tarde pasó por el km 182. Queremos encontrar su función de posición. Para ello elegimos unidades y referencias:

- $t = 0$ representa las 8:30 (referencia para el tiempo)
- mediremos el tiempo en minutos
- la posición la daremos en kilómetros desde el origen de la ruta, esto es: usaremos el mismo kilometraje que la ruta.

1. ¿Cuánto vale $r(0)$? ¿Cuánto vale $r(10)$?
2. Calculamos la velocidad media entre $t = 0$ y $t = 10$. Completen:

$$v_m = \frac{r(10) - r(0)}{10 - 0} = \frac{\qquad\qquad}{} = \qquad\qquad km/\min$$

3. Usando la expresión de la sección anterior con $t_0 = 0$, tendremos:

$$\begin{aligned} r(t) - r(0) &= v_m(t - 0) \\ r(t) &= v_m t + r(0) \end{aligned}$$

y reemplazando los valores que tenemos para v_m y $r(0)$ obtenemos:

$$r(t) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Como muestra de la utilidad de esta manera de analizar el movimiento uniforme resolveremos uno de los llamados “problemas de encuentro”. Primero lo haremos sólo gráficamente, para después resolverlo algebraicamente.

ACTIVIDAD

Dos puntos, A y B, están sobre una recta y la distancia entre ellos es de 30 unidades. Supongamos que pasa por A en dirección a B un móvil con movimiento uniforme a

una velocidad de 5 unidades / segundo. Dos segundos después pasa por B hacia A otro móvil –también con movimiento uniforme-. El segundo móvil se encuentra con el primero tres segundos después de haber pasado por B.

1. Analicen la situación gráficamente. Para ello:
   a. Grafiquen la posición del primer móvil en función del tiempo.
   b. En la misma gráfica, ubiquen la posición del segundo móvil al pasar por B.
   c. ¿Qué instante corresponde al encuentro entre los dos móviles? ¿Cuál fue la posición del segundo móvil en ese instante?
   d. ¿Pueden trazar la gráfica de la función de posición del segundo móvil?
   e. Estimen la velocidad del segundo móvil a partir de la gráfica.
2. Calculemos ahora algebraicamente la velocidad del segundo móvil:
   a. Llamemos $p_A(t)$ a la función de posición del primer móvil. ¿Cuál es la expresión de $p_A(t)$?
   b. Si $p_B(t)$ es la función de posición del segundo móvil ¿Cuánto valen $p_B(2)$ y $p_B(5)$?
   c. ¿Alcanzan los datos del inciso anterior para calcular la velocidad del segundo móvil? Háganlo y comparen con la estimación gráfica que hicieron antes.
   d. Encuentren la expresión de $p_B(t)$.

Otros modelos lineales

Si X e Y son dos variables que representan magnitudes, diremos que están linealmente relacionadas si la variación media de X respecto de Y es constante y diferente de 0. Es decir:

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X} = k \neq 0$$

De acuerdo a lo que hemos visto, resulta que en este caso Y es una función lineal de X, siendo k la pendiente de la recta que es la gráfica de Y en función de X.

EJEMPLO

Las escalas Celsius y Fahrenheit se usan para medir temperaturas. Ambas están linealmente relacionadas, y se tienen las siguientes equivalencias:

^{o}C (Celsius)	^{o}F (Fahrenheit)
0	32
100	212

queremos determinar las fórmulas de conversión de una temperatura C en grados Celsius a la correpondiente temperatura F en grados Fahrenheit. Como ambas escalas

están relacionadas linealmente, tendremos:

$$\frac{\Delta F}{\Delta C} = k = \frac{212 - 32}{100 - 0} = \frac{9}{5}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} F(C) - F(0) &= \frac{9}{5}(C - 0) \\ F(C) &= \frac{9}{5}C + 32 \end{aligned}$$

EJERCICIOS

1. Encuentren la fórmula de conversión de grados F a grados C.
2. Se quiere determinar la presión ejercida por el agua sobre el traje de un buzo en función de la profundidad a la que se halla sumergido, sabiendo que la presión aumenta a razón de 1 atmósfera por cada 10 metros descendidos. Usen que la presión en la superficie es de 1 atmósfera.
3. Una máquina realiza un trabajo en dos horas. Otra hace el mismo trabajo en 1 hora y media. Suponiendo que no se interfieren ¿En cuánto tiempo realizarán el trabajo ambas máquinas funcionando conjuntamente?
4. ¿Cómo harían para comprobar si los puntos de coordenadas (-2,1) , (-1,0) y (2,-2) están sobre una recta?

2.4 La derivada

La noción de derivada de una función es la respuesta a la cuestión de encontrarle significado a la idea de "variación instantánea" de una función.

En la secciones anteriores hemos definido la variación media de una función en un intervalo como el cociente entre la variación total de la función y la variación de la variable independiente:

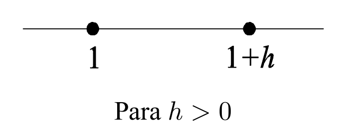
$$\text{variación media} = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

La pregunta ¿Cuánto varió en promedio la función $f(x) = x^2 - 1$ en el intervalo$[-1, 5]$? se responde naturalmente así:

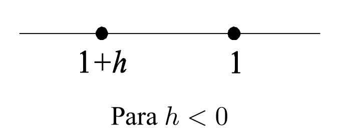
$$\text{variación media} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(5) - f(-1)}{5 - (-1)} = \frac{24}{6} = 4$$

Ahora bien la pregunta **¿A qué velocidad está cambiando f cuando $x = 1$?** no parece tener una respuesta tan sencilla. En efecto, para calcular variaciones medias (que es lo que sabemos hacer) necesitamos un intervalo, y solamente tenemos un valor ($x = 1$). Sin embargo algo como la velocidad en un instante debe existir (pensar en la velocidad de un auto, por ejemplo). Podemos hacer lo siguiente: si nos interesa $x = 1$ tomemos intervalos pequeños que contengan a $x = 1$ y calculemos para ellos

la variación media; la idea es que esos cálculos revelen algún patrón que nos guíe a la respuesta que buscamos (recuerden la pregunta original). Hagámoslo en una serie de pasos:



Para $h > 0$



Para $h < 0$

Paso 1. Los intervalos: Si queremos intervalos pequeños que contengan al 1, lo hacemos de la siguiente manera. Consideramos un número h cualquiera (que pensamos pequeño), y consideramos el intervalo de extremos 1 y $1 + h$ (Ver figuras al lado).

Paso 2. La variación media: Calculamos ahora la variación media de f entre 1 y $1 + h$:

$$\begin{aligned} \text{variación media} &= \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(1+h) - f(1)}{1+h-1} = \\ &= \frac{(1+h)^2 - 1 - (1^2 - 1)}{h} = \frac{(1+h)^2 - 1}{h} \end{aligned}$$

esta úlima expresión corresponde a la variación media de la función f en cualquier intervalo cuyos extremos sean 1 y $1 + h$.

Paso 3. ¿$h = 0$? Lamentablemente no es posible evaluar la expresión obtenida para $h = 0$ (¿por qué?). Sin embargo podemos evaluarla para valores de h tan pequeños como querramos. En la tabla siguiente calculamos algunos de esos valores:

h	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	0.0001	0.001	0.01	0.1
$\frac{(1+h)^2-1}{h}$	1.9	1.99	1.999	1.9999	2.0001	2.001	2.01	2.1

comprobamos, que para valores de h muy pequeños la variación media se aproxima al valor 2.

Paso 4. La variación instantánea: Otra forma de sortear la dificultad es la siguiente: si observamos la expresión obtenida y desarrollamos el cuadrado obtenemos:

$$\frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \frac{2h + h^2}{h} = 2 + h$$

esta igualdad debe interpretarse en el sentido de que las dos expresiones coinciden para cualquier valor de h para el cual estén ambas definidas. Ahora bien, estando la última $(2 + h)$ definida para todos los valores de h mientras que la primera no lo está únicamente para $h = 0$, parece natural asignarle el valor 2 a la variación instantánea.

Paso 5. El límite: Asignarle a la expresión $\frac{(1+h)^2-1}{h}$ el valor 2 para $h = 0$, basados en lo hecho en los pasos 3 (exploración numérica) y 4 (transformación algebraica) se expresa diciendo que **el límite de** $\frac{(1+h)^2-1}{h}$ **cuando** h **tiende a** 0 **es** 2, y se denota:

$$\lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = 2$$

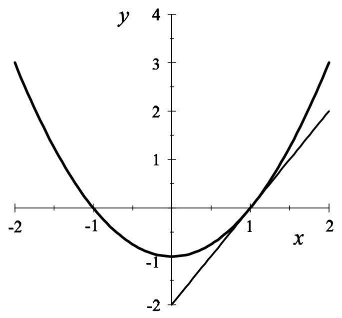
Paso 6. Interpretación gráfica: En los pasos anteriores obtuvimos que la variación instantánea de $f(x) = x^2 - 1$ en $x = 1$ era igual a 2.

En vista de la interpretación geométrica, la recta de pendiente 2 que pasa por $(1, 0)$ es, en algún sentido, el límite de las rectas secantes a la gráfica (Ver página 33: Interpretación gráfica). La ecuación de esa recta es:

$$y - 0 = 2(x - 1)$$

$$y = 2x - 2$$

si dibujamos la gráfica de $f(x) = x^2 - 1$ y la recta $y = 2x - 2$ en un mismo sistema de ejes obtenemos el dibujo de al lado.



La recta tangente a la gráfica por el punto $(1, f(1))$

El cociente incremental o de Newton. Definición de derivada

Sea f una función y sea x un número en el dominio de f. Se llama **cociente incremental (o cociente de Newton)** de f en x a la expresión:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

donde h es un número distinto de 0.

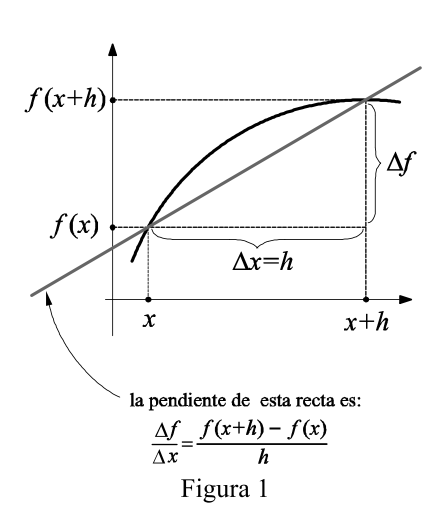


Figura 1

Tal como hemos visto el cociente incremental no es más que la variación media de la función f en el intervalo de extremos x y $x+h$. Gráficamente, como lo hemos visto (página 33: Interpretación gráfica) el cociente incremental es la pendiente de la recta secante al gráfico de f por los puntos $(x, f(x))$ y $(x+h, f(x+h))$. Ver Figura 1.

Cuando h es pequeño, el número $x+h$ está próximo a x, y es de esperar que el número $f(x+h)$ esté próximo a $f(x)$. En consecuencia los puntos de la gráfica $P\,(x, f(x))$ y $Q\,(x+h, f(x+h))$ serán también cercanos.

Podemos imaginar que, al aproximarse h a 0, el punto Q se aproxima al punto P, y la recta secante se aproxima a la recta tangente. Ver Figura 2.

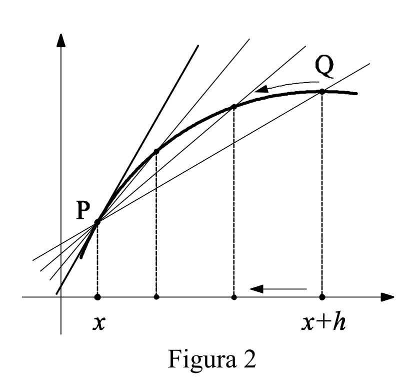


Figura 2

Definición

Sea f una función, y sea x un número en el dominio de f. Llamamos **derivada** de f en x al límite del cociente incremental de f en x cuando el incremento tiende a 0, siempre que ese límite exista. A la derivada la indicamos $f'(x)$. Entonces:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

EJEMPLO

Encontremos la derivada de $f(x) = 2x^2 - 1$.

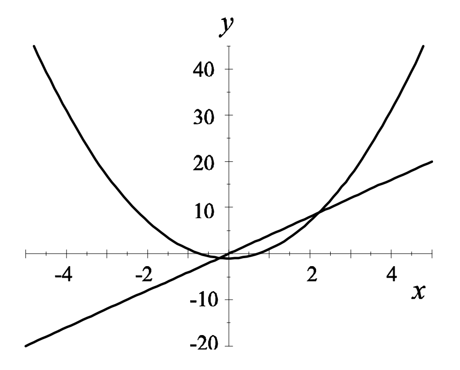
1. Construimos el cociente incrementral de f en x :

$$\frac{\overbrace{2(x+h)^2 - 1}^{f(x+h)} - \overbrace{(2x^2 - 1)}^{f(x)}}{h}$$

2. Desarrollamos el cociente y simplificamos:
$$\frac{2(x^2+2xh+h^2)-1-2x^2+1}{h} = \frac{2x^2+4xh+2h^2-2x^2}{h} =$$
$$\frac{2x^2+4xh+2h^2-2x^2}{h} = \frac{4xh+2h^2}{h} = \frac{h(4x+2h)}{h} = 4x+2h$$

3. Como obtuvimos una expresión del cociente incremental en la cual el factor h desaparece del denominador, podemos proponer fácilmente un valor para el límite:
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2(x+h)^2-1-\left(2x^2-1\right)}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0} 4x+2h = 4x+2.0 = 4x$$
y por lo tanto:
$$f'(x) = 4x$$

4. Graficamos a la función y a su derivada en el mismo dibujo (Ver figura al margen).



Las gráficas de $f(x) = 2x^2 - 1$ y la de su derivada $f'(x) = 4x$

Resumiendo lo que hemos visto hasta ahora, la derivada de $f(x)$ es una nueva función, cuyo dominio son todos los x para los cuales existe el límite del cociente incremental. Esta nueva función admite varias interpretaciones, todas ellas importantes y útiles en los contextos apropiados:

- **Geométricamente,** la derivada $f'(a)$ es la **pendiente de la recta tangente** a la gráfica de la función por el punto $(a, f(a))$. La ecuación de la recta tangente por ese punto será, por lo tanto:
$$y - f(a) = f'(a)(x-a)$$
- En términos de la **variación,** la derivada $f'(x)$ representa la **variación instantánea** de la función f en el valor x. A la variación instantánea también se la denomina *razón de cambio instantánea* o *tasa de cambio instantánea*.
- En el contexto del **movimiento rectilíneo** de un objeto, si $f(x)$ es la función de posición, la derivada $f'(x)$ es la **velocidad instantánea** del objeto en el instante x.

EJEMPLO

La derivada de una función lineal: Consideremos la función lineal $f(x) = 2x - 1$. Parece bastante claro que cualquiera sea el x que consideremos, la tangente a la gráfica de la función por $(x, f(x))$ será la misma recta. Vamos a comprobarlo:

El cociente incremental es
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{2(x+h)-1-(2x-1)}{h} =$$
$$= \frac{2x+2h-1-2x+1}{h} = \frac{2h}{h} = 2$$
de manera que el cociente incremental tiene un valor que es independiente de h. Por

lo tanto:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 2$$

cualquiera sea el x que estemos considerando. De donde resulta que la pendiente de la tangente es la misma que la de la recta. Como ambas pasan por el punto es evidente que coinciden.

EJERCICIOS

Muestren que lo visto en el ejemplo anterior vale para cualquier función lineal $f(x) = mx + b$. Para ello calculen el cociente incremental de $f(x)$ y comprueben que es siempre igual a m.

EJEMPLO

La derivada de una función cuadrática: Consideremos la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$. Calculando el cociente incremental (hacerlo) y operando (hacerlo) comprobamos que el mismo es igual a:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 2ax + ah + b$$

y por lo tanto, pasando al límite obtenemos:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} 2ax + ah + b = 2ax + b$$

Concluímos que:

$$\left(ax^2 + bx + c\right)' = 2ax + b$$

EJEMPLO

La derivada de una función potencia de exponente natural: Consideremos la función potencia $f(x) = x^n$. Si $n = 1$ la función es $f(x) = x$. Como hemos visto en el caso de una función lineal, tendremos $f'(x) = 1$. Si $n = 2$ entonces $f(x) = x^2$ y el ejemplo anterior nos informa que $f'(x) = 2x$. Hagamos en detalle el caso $n = 3$,

esto es: $f(x) = x^3$. El cociente incremental queda:

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\ &= \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\ &= \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} \\ &= \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2\end{aligned}$$

para calcular la derivada, pasamos al límite:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} 3x^2 + 3xh + h^2 = 3x^2$$

Una cuenta similar nos muestra que si $f(x) = x^n$ entonces:

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

EJERCICIOS

Para las funciones $1/x$; x^2, $2x$, $\sqrt{x}$, $x^2 + 2$:

1. Determinen el cociente de Newton de la función en x.
2. Efectúen las simplificaciones necesarias para obtener una expresión del cociente que elimine el factor h del denominador.
3. Propongan un valor para el límite de cada cociente incremental cuando el incremento h tiende a 0.
4. Escriban el resultado con la notación de derivada.
5. Utilicen la computadora y el programa adecuado para graficar cada función y su derivada en el mismo dibujo. En Maple, para dibujar varias funciones en el mismo gráfico usen como argumento en el comando plot a la lista de funciones a graficar encerrada entre corchetes. Ejemplo: `plot([x^2+2,2*x],x)`.

Reglas de derivación

El cálculo de derivadas sería muy engorroso (y tal vez imposible) si para cada función dada debiéramos escribir el cociente incremental y calcular el límite. Lo que se hace es calcular ciertas derivadas básicas por medio de la definición y luego usar las llamadas reglas de derivación para encontrar derivadas de funciones más complicadas.

Las reglas de derivación se obtienen como consecuencia de las propiedades de la operación de paso al límite, las cuales estudiaremos más adelante. La operación de paso al límite –que fue necesaria para definir la derivada- es fundamental en Análisis Matemático, como tendremos oportunidad de comprobar a lo largo de este curso.

La derivada de una función constante

Si $f(x) = k$ es una función constante se tiene que:

$$f'(x) = 0$$

Si la derivada representa una medida de la variación instantánea de la función, es natural que la derivada de una función constante (esto es, que no cambia en absoluto) sea 0.

La derivada de la función identidad

Si $f(x) = x$ se tiene que

$$f'(x) = 1$$

La derivada de una función potencia

Si r es cualquier número racional fijo y $f(x) = x^r$ entonces se tiene que:

$$f'(x) = rx^{r-1}$$

EJEMPLO

Consideremos $f(x) = \sqrt{x}$. Podemos escribir $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. Por la regla anterior tendremos:

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

La derivada de una constante por una función

Si $f(x)$ es una función y k es una constante se tiene:

$$(k.f(x))' = k.f'(x)$$

EJEMPLO

Consideremos la función $f(x) = \frac{1}{4}\sqrt{x}$. De acuerdo a la regla anterior, se tendrá:

$$f'(x) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{8\sqrt{x}}$$

Las reglas siguientes se refieren a la derivada de la suma, el producto y el cociente de dos funciones. Supondremos que f y g son dos funciones derivables en x.

La derivada de una suma

La derivada de la función suma $f(x) + g(x)$ es la suma de las derivadas de $f(x)$ y de

$g(x)$. Esto es:

$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$$

EJEMPLO

Sea $f(x) = 5x + x^3$. Calculamos su derivada de la siguiente manera:

$$f'(x) = (5x)' + \left(x^3\right)' = 5.\,(x)' + 3x^2 = 5.1 + 3x^2 = 5 + 3x^2$$

La derivada de la función producto

La derivada del producto de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ se calcula según la siguiente regla:

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

EJEMPLO

A la derivada de $f(x) = \frac{x^3}{3}(1+\sqrt{x})$ la podemos calcular de esta manera:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^3}{3}\right)'\cdot(1+\sqrt{x}) + \left(\frac{x^3}{3}\right)\cdot(1+\sqrt{x})' = \\ &= \frac{1}{3}\left(x^3\right)'\cdot(1+\sqrt{x}) + \left(\frac{x^3}{3}\right)\cdot\left(0+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \\ &= \frac{1}{3}3x^2\left(1+\sqrt{x}\right) + \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = x^2 + x^2\sqrt{x} + \frac{x^3}{6\sqrt{x}} \end{aligned}$$

.

La derivada de la función cociente

Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones que tienen derivada, y además $g(x)\neq 0$, entonces la derivada del cociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ se calcula según la siguiente regla:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

EJEMPLO

Encontremos la derivada de $f(x) = \frac{x^4}{1+x}$. Tendremos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left(x^4\right)'(1+x) - \left(x^4\right)(1+x)'}{(1+x)^2} = \\ &= \frac{4x^3 \cdot (1+x) - \left(x^4\right) \cdot 1}{(1+x)^2} = \\ &= \frac{4x^3 + 4x^4 - x^4}{(1+x)^2} = \frac{4x^3 + 3x^4}{(1+x)^2} \end{aligned}$$

EJERCICIOS

1. Deriven

   1) $f(x) = x^2 - 10x + 100$ 6) $g(x) = x^{100} - 50x + 1$

   2) $v(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ 7) $s(t) = t^3 + 6t^7 + 2t$

   3) $f(x) = (2x)^3$ 8) $g(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$

   4) $h(x) = \frac{x+2}{x+1}$ 9) $G(s) = \left(s^2 + s + 1\right)\left(s^2 + 2\right)$

   5) $f(u) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ 10) $f(x) = \frac{x^5}{x^3 - 2}$

2. Encuentren la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado:

   1) $y = \frac{x}{x-3}$; $(6, 2)$ 3) $y = x + \frac{4}{x}$; $(2, 4)$

   2) $y = \frac{x}{1+x^2}$; $(3, 0.3)$ 4) $y = \frac{1}{1+x^2}$; $(-1, 1/2)$

3. ¿Qué tangentes a la curva $y = (x-1)/(x+1)$ son paralelas a la recta $x - 2y = 1$?

4. Se conocen los siguientes valores:

$f(5)$	$f'(5)$	$g(5)$	$g'(5)$
1	6	-3	2

   Determinen cuánto valen:

   a) $(fg)'(5)$ b) $(f/g)'(5)$ c) $(g/f)'(5)$

2.5 La regla de la cadena

Composición de funciones

La composición de funciones es una operación importante, que aparece en forma natural en una gran variedad de situaciones.

EJEMPLO

Sea $f(x) = \sqrt{x^2+1}$. Supongamos que queremos calcular $f(2)$; en papel o en calculadora deberemos proceder por pasos (esto parece una pavada y, efectivamente, lo es. Pero es una pavada importante):

1. Calculamos $2^2 = 4$
2. Sumamos uno: $4+1=5$
3. Tomamos la raíz cuadrada: $\sqrt{5}$

Podemos interpretar el ejemplo anterior de la siguiente manera: la función $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ resulta de la aplicación sucesiva de las funciones:

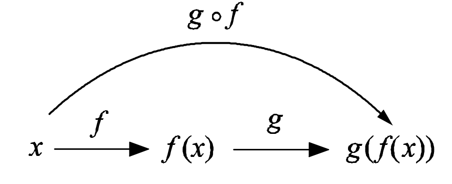
$$x \overset{\text{elevar al cuadrado}}{\longrightarrow} x^2 \overset{\text{sumar 1}}{\longrightarrow} x^2+1 \overset{\text{tomar raíz cuadrada}}{\longrightarrow} \sqrt{x^2+1}$$

Llamemos:

- g a la función "elevar al cuadrado". Entonces $g(x) = x^2$
- h a la función "sumar uno". Entonces $h(x) = x+1$
- k a la función "tomar raíz cuadrada". Entonces $k(x) = \sqrt{x}$

$$x \overset{\text{elevar al cuadrado}}{\longrightarrow} x^2 \overset{\text{sumar 1}}{\longrightarrow} x^2+1 \overset{\text{tomar raíz cuadrada}}{\longrightarrow} \sqrt{x^2+1}$$
$$x \overset{g}{\longrightarrow} g(x) \overset{h}{\longrightarrow} h(g(x)) \overset{k}{\longrightarrow} k(h(g(x)))$$

La operación de aplicar sucesivamente dos o más funciones en un orden determinado da origen a una nueva función llamada **composición** de las funciones intervinientes. Más precisamente, daremos la siguiente definición:



Representación esquemática de la función compuesta $g \circ f$

Definición

Dadas dos funciones numéricas f y g llamaremos **composición** de f con g (o bien función compuesta por f y g) a la función obtenida por la aplicación sucesiva de f y g, en ese orden. A la función compuesta la denotaremos $g \circ f$. O sea:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

¿Cuál es el dominio de la función compuesta $g \circ f$? Observando lo anterior, vemos que son necesarias dos condiciones para poder calcular $g(f(x))$:

- x debe pertenecer al dominio de f
- $f(x)$ debe pertenecer al dominio de g

EJEMPLO

1. Sean $f(x) = x + 1$ y $g(x) = \sqrt{x}$. Encuentre $g \circ f$ y determine su dominio.

   De acuerdo con la definición es:
   $$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 1) = \sqrt{x + 1}$$
   Para determinar el dominio, observemos que $f(x) = x + 1$ está definida para cualquier valor de x. Por lo tanto, para que $g(f(x))$ pueda calcularse debe ser $x + 1 \geq 0$. Es decir, el dominio de $g \circ f$ es la semirrecta $[-1, +\infty)$.

2. Sean f y g como en el ejemplo anterior. Veamos qué pasa con la función que consiste en aplicar primero g y luego f; esto es, encontremos la función $f \circ g$ y determinemos su dominio.

   De acuerdo con la definición:
   $$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + 1$$
   Su dominio es la semirrecta $[0, +\infty)$.

   Vemos que la composición, en tanto que operación entre funciones, no es conmutativa; es decir que, en general, $g \circ f \neq f \circ g$,

EJERCICIOS

1. Determinen las funciones compuestas $g \circ f$ y $f \circ g$ y encuentren sus dominios; escriban a éstos últimos con la notación de intervalos.
   a. $f(x) = x + 1 \qquad g(x) = \sqrt{x - 1}$
   b. $f(x) = \dfrac{1}{x} \qquad g(x) = 2x - 1$
   c. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1} \qquad g(x) = x^2 - 2$
   d. $f(x) = \dfrac{1}{x} \qquad g(x) = \dfrac{1}{x + 1}$

2. Identifiquen funciones f y g de manera que la función dada en cada caso sea igual a $f \circ g$.
   a. $\sqrt{x^4 + 1}$
   b. $4(x + 1)^2 + 3$
   c. $\dfrac{2}{x^2 + 1}$

3. Dadas $f(x) = 1 + x$ y $g(x) = 2x^2$ hallen:

a. $f(g(0))$ y $g(f(0))$

b. $f(g(-1))$ y $g(f(-1))$

c. $f(g(t))$ y $g(f(t))$

4. En un estanque en calma se deja caer una piedra. Al hacerlo, se producen ondas en forma de círculos concéntricos. El radio en metros de la onda externa viene dado por $r(t) = 0.3t$, donde t es el tiempo en segundos transcurrido desde que la piedra toca el agua. El área del mismo círculo viene dada por $A(r) = \pi r^2$. Determinen e interpreten la función $(A \circ r)(t)$.

5. Sean $f(x) = 2x + 5$; $g(x) = x^2 + 1$; $h(x) = \dfrac{1}{x}$. Para cada una de las funciones definidas en la columna de la izquierda, encuentren una función igual en la columna de la derecha.

1	$f + g - h$
2	$f.g + 2h$
3	$f \circ h$
4	$h \circ g$
5	$g \circ f \circ h$
6	$h \circ f \circ g$
7	$h \circ h \circ f \circ f$
8	$h \circ f \circ h \circ f$
9	$h \circ (f + g)$
10	$g \circ (g.g)$

a	$x \to (2x+5)(x^2+1) + 2/x$
b	$x \to 1/(x^2+1)$
c	$x \to (\frac{2}{x}+5)^2 + 1$
d	$x \to \frac{1}{x^2+2x+6}$
e	$x \to (x^2+1)^4 + 1$
f	$x \to (2x+5)/(10x+27)$
g	$x \to x^2 + 2x + 6 - \frac{1}{x}$
h	$x \to 4x + 15$
i	$x \to 1/(2x^2+7)$
j	$x \to \frac{2}{x} + 5$

Derivada de una función compuesta

Hemos visto cómo construir la composición de dos funciones dadas: la idea fue aplicarlas en forma sucesiva. Ahora veremos cómo calcular la razón de cambio instantánea (esto es: la derivada) de una composición de funciones en términos de las derivadas de las funciones compuestas. La regla que se aplica se denomina “regla de la cadena” y es extremadamente útil. La **regla de la cadena** afirma, para decirlo rápidamente, que la razón a la que cambia la composición $g \circ f$ en un valor x es el producto de la razón a la que cambia f en x por la razón a la que cambia g en $f(x)$:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)).f'(x)$$

EJEMPLO

Calcule la derivada de $h(x) = (2x^2 + x)^{100}$.

Podemos ver a $h(x)$ como la composición de las funciones $f(x) = 2x^2 + x$ y $g(x) = x^{100}$. La regla de la cadena afirma:

$$h'(x) = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)).f'(x)$$

tenemos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x+1 \\ g'(f(x)) &= 100(2x^2+x)^{99} \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\left[(2x^2+x)^{100}\right]' = 100(2x^2+x)^{99}(4x+1)$$

En la práctica, la mayoría de nosotros aplica la regla de la cadena en la siguiente forma:

1. Se identifican las funciones intervinientes desde el exterior al interior de la expresión. En nuestro caso:

$$\overbrace{(\underbrace{2x^2+x}_{\text{función interior}})^{100}}^{\text{función exterior}}$$

2. Se deriva la función exterior, tratando al argumento como si fuera una variable independiente:

$$100(2x^2+x)^{99}$$

3. Se multiplica lo anterior por la derivada de la función interior:

$$100(2x^2+x)^{99}(4x+1)$$

¡y ésa es la derivada de la función compuesta!

EJERCICIOS

1. Encuentren la derivada de las siguientes funciones directamente y luego usando la regla de la cadena:

a) $\left(x^2+3\right)^2$ b) $\dfrac{1}{x^3}$

2. Escriban a la función composición en la forma $g(f(x))$ (identifiquen la función interior $u = f(x)$ y la exterior $y = g(u)$). Luego encuentren la derivada de la función compuesta:

a) $y = \left(x^2+4x+6\right)^5$ d) $y = \dfrac{1}{(x^2-2x-5)^4}$

b) $y = \left(x^3+4x\right)^7$ e) $y = \sqrt[3]{1+x^3}$

c) $y = \left(x - \dfrac{1}{x}\right)^{3/2}$ f) $y = \left(x^2-x+1\right)^{-3}$

3. Usen la regla de la cadena para calcular la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \left(x^3-2x^2-5x\right)^2$ c) $f(x) = \left[(2x+1)^2-5x\right]^5$

b) $f(x) = \sqrt{x^{1/2}+x^3}$ d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

4. Se da una tabla de valores para f, g, f' y g' :

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
1	3	2	4	6
2	1	8	5	7
3	7	2	7	9

a. Si $h(x) = f(g(x))$, hallen $h'(1)$.

b. Si $H(x) = g(f(x))$, hallen $H'(1)$.

Capítulo 3
Continuidad

Este capítulo está dedicado a la noción de continuidad y al teorema del valor intermedio y sus consecuencias. Para ello se introduce la noción de límite y se presta atención al comportamiento de la función cerca de un punto. El objetivo de este capítulo es de alguna manera más “teórico” que el de los capítulos anteriores.

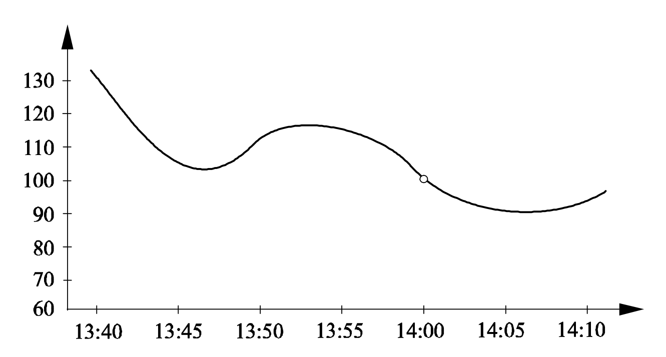
3.1 Límites

La operación de paso al límite -cuya necesidad comprobamos al definir la derivada de una función- es básica y fundamental para los temas que tratamos en este curso.

El "valor esperado"

ACTIVIDAD

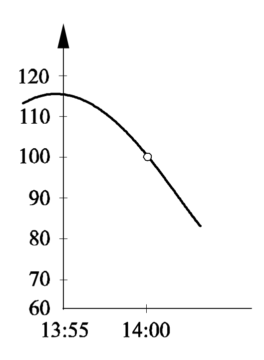
Un dispositivo registra los valores de la frecuencia cardíaca de un paciente internado, generando una gráfica. Debido a una falla en el dispositivo de impresión en la gráfica no aparece el valor correspondiente a las 14 horas. La figura siguiente es el gráfico obtenido:



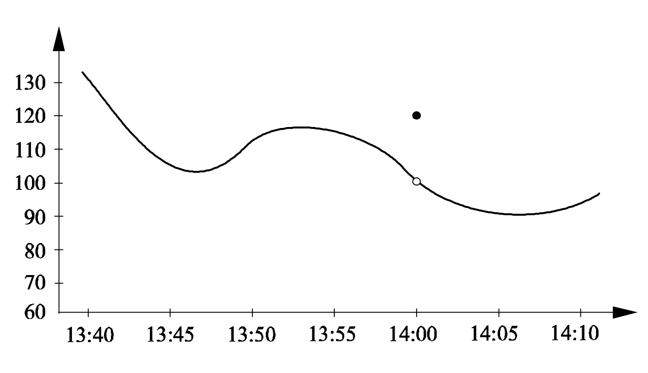
Considerando la situación descripta, respondan a las siguientes preguntas:

1. ¿Qué valor esperan que haya tenido la frecuencia cardíaca a las 14:00?
2. Para responder a la pregunta anterior, ¿qué intervalo o intervalos tuvieron en cuenta? Por ejemplo ¿importan los valores de la frecuencia cardíaca antes de las 13:50?

3. Si el gráfico suministrado hubiera sido el siguiente ¿cuál sería el valor esperado para la f.c. a las 14:00?



4. Supongamos ahora que la gráfica es la siguiente ¿cuál sería el valor esperado para la f.c. a las 14:00?



En la actividad anterior tratamos con una función cuyo valor en un instante determinado (a las 14:00 horas) nos era desconocido. Sin embargo, teniendo en cuenta el comportamiento de la función en las cercanías de ese instante –esto es: en un pequeño intervalo antes y después de las 14:00 horas- encontramos un "valor esperado" para la función.

Ese "valor esperado" no cambia aun en el caso considerado en el punto 4, en el que el valor de la función a las 14:00 es conocido. El hecho de que esos valores (el esperado y el real) fueran diferentes señala una anomalía que, en el contexto de la situación planteada, debería ser explicada.

Parece bastante claro que en cualquiera de los otros instantes incluidos en el dominio el valor esperado coincide con el valor de la función.

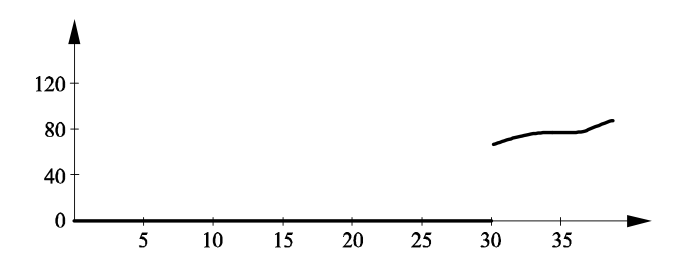
No siempre es posible asignar a una función un "valor esperado" en un punto. Veamos:

ACTIVIDAD

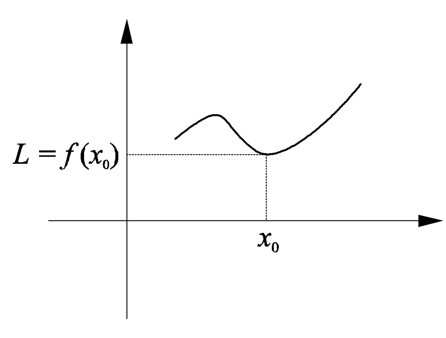
Para seguir con el tema de la frecuencia cardiaca, consideremos la siguiente situación: un individuo sufre un paro cardiaco mientras está internado en un hospital. Rápi-

damente es sometido a un proceso de reanimación el cual tiene éxito después de 30 segundos, restableciendo su frecuencia cardiaca a un valor de 80.

1. Discutan la validez de la siguiente gráfica, que representa la frecuencia cardiaca en función del tiempo (t es el tiempo medido en segundos, y $t = 0$ es el instante en el cual comienza el procedimiento de reanimación).



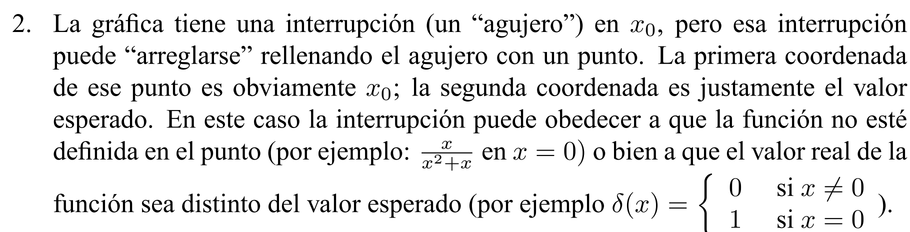
2. ¿Cuál dirían Uds. que es el valor esperado de la frecuencia cardiaca en $t = 30$? ¿Es posible dar una respuesta que sea coherente al mismo tiempo con lo sucedido antes de ese instante y con lo sucedido después?



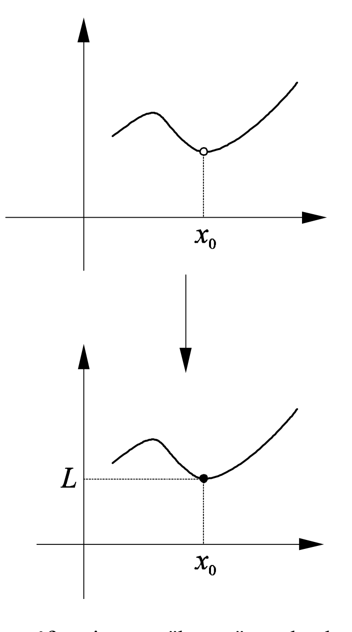
La gráfica pasa por el punto sin cortarse. El valor esperado coincide con el valor de la función: x_0 es un **punto de continuidad**.

Gráficamente es relativamente sencillo determinar si una función tiene un valor esperado L en un punto determinado. Digamos que la función es f (qué nombre original) y el punto en cuestión es x_0. Hay dos casos:

1. La gráfica pasa por el punto sin cortarse. En este caso el valor esperado L coincide con el valor real de la función (se dice que, en este caso, x_0 es **un punto de continuidad** de f).



2. La gráfica tiene una interrupción (un “agujero”) en x_0, pero esa interrupción puede “arreglarse” rellenando el agujero con un punto. La primera coordenada de ese punto es obviamente x_0; la segunda coordenada es justamente el valor esperado. En este caso la interrupción puede obedecer a que la función no esté definida en el punto (por ejemplo: $\frac{x}{x^2+x}$ en $x = 0$) o bien a que el valor real de la función sea distinto del valor esperado (por ejemplo $\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$).



La gráfica tiene un "hueco" en el valor correspondiente a x_0 ; pero ese hueco puede rellenarse con el punto (x_0, L).

En resumen, desde el punto de vista gráfico, una función tendrá un valor esperado en un punto dado si su gráfica no se interrumpe en ese punto o bien la gráfica tiene una interrupción que se puede arreglar agregando un punto.

EJERCICIOS

Utilizando Maple grafiquen las siguientes funciones en un intervalo alrededor del punto que se indica. A partir de la gráfica decidan si f tiene un valor esperado en dicho punto, y en caso afirmativo digan cuál es ese valor. También analicen si corresponde al caso 1 o 2 de los descriptos arriba. OJO: en las gráficas generadas por Maple no es posible ver un agujero...¡del tamaño de un punto!

1. $f(x) = x^2 + 3$ $\qquad x_0 = 2$
2. $f(x) = 3x + \sqrt{x}$ $\qquad x_0 = 0$

3. $f(x) = \dfrac{1-x}{x}$ $\quad x_0 = 0$

4. $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$ $\quad x_0 = 1$

5. $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ $\quad x_0 = 1$

6. $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ $\quad x_0 = 0$

7. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ $\quad x_0 = 0$ (Recordar que para definir a f en Maple hay que utilizar el comando "piecewise")

8. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad x_0 = 0$

9. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ $\quad x_0 = 1$

Valor esperado y límite de una función

ACTIVIDAD

Consideremos la función del inciso 4 del Ejercicio anterior. Se ha visto gráficamente que esa función tiene el valor esperado $1/2$ en $x_0 = 1$.

1. Construyan una lista de diez números, comenzando en el 0, que sea creciente y cuyos términos sean cada vez más próximos a 1 (pero distintos de 1).

2. Formen una nueva lista, ahora construida con los valores de f en los números de la lista anterior.

3. La primera lista se aproximaba a 1 ¿a qué valor se aproxima la segunda?

4. Hagan lo mismo para una lista que comience en 2 y se aproxime a 1 en forma descendente.

5. Hagan lo mismo, pero con una lista que se aproxime a 1 pero que alterne valores mayores y menores que 1.

La conclusión de la actividad anterior es general y se puede expresar de la siguiente manera: Si una función tiene un valor esperado L en un punto x_0 entonces cada vez que nos aproximemos a x_0 por una serie de valores (sin importar la forma en que lo hagamos), los valores de la función en los números de esa serie se aproximarán a L.

Esto justifica la siguiente denominación: si f tiene un valor esperado L en x_0 diremos

que L es **el límite de** $f(x)$ **cuando** x **tiende a** x_0, y lo denotaremos:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

Por ejemplo, de la actividad anterior tenemos:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{2}$$

EJERCICIOS

Usen la notación $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ para expresar los resultados encontrados para las funciones y los puntos del ejercicio de la página 55. En los casos en los que hayan encontrado que no existe un valor esperado, exprésenlo de la siguiente manera: "$\lim_{x\to x_0} f(x)$ no existe".

3.2 Cálculo de límites

Así como no es practicable el cálculo de derivadas utilizando la definición (salvo en algunos casos sencillos) tampoco resulta práctico (ni correcto en algunos casos) calcular límites por medios gráficos o por medio de una tabla de valores. De manera que estableceremos algunas reglas o propiedades de los límites que nos facilitarán la tarea. Hay que prestar particular atención a las condiciones requeridas para la aplicación de las reglas; ignorarlas puede conducirnos a meter la pata, algunas veces hasta la cintura.

Dos reglas obvias

1. Si f es una función constante, digamos $f(x) = k$, entonces para cualquier x_0 se tendrá:
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = k$$
2. Si f es la función identidad $f(x) = x$, entonces para cualquier x_0 se tendrá:
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = x_0$$

Límites y operaciones algebraicas

En lo que sigue consideraremos dos funciones f y g y supondremos que en un punto x_0 ambas tienen límite. Digamos

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = M$$

Se tienen las siguientes reglas que vinculan al límite con las operaciones algebraicas (suma, producto, cociente y potencia):

1. La **suma** $f(x) + g(x)$ tiene límite cuando $x \to x_0$ y se tiene:
$$\lim_{x\to x_0} f(x) + g(x) = L + M$$

2. El **producto** $f(x) \cdot g(x)$ tiene límite cuando $x \to x_0$ y se tiene:
$$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = L \cdot M$$

3. Si $M \neq 0$, entonces el **cociente** $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tiene límite cuando $x \to x_0$ y se tiene:
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$$

4. **El límite de una función potencia:** para cualquier valor racional $\frac{p}{q}$ la función potencia $f(x) = x^{\frac{p}{q}}$ tiene límite y se tiene:
$$\lim_{x \to x_0} x^{\frac{p}{q}} = x_0^{\frac{p}{q}}$$
Si el denominador q es un número par, el límite anterior solamente tiene sentido para valores positivos de x_0.

EJEMPLO

¿Cuáles propiedades usamos en el cálculo del límite del ejemplo?

Calculemos, usando las propiedades el siguiente límite:
$$\begin{aligned} \lim_{x \to 2} 1 + 3x + x^2 &= \lim_{x \to 2} 1 + \lim_{x \to 2} 3x + \lim_{x \to 2} x^2 \\ &= \lim_{x \to 2} 1 + \lim_{x \to 2} 3 . \lim_{x \to 2} x + \left(\lim_{x \to 2} x\right)^2 \\ &= 1 + 3.2 + 2^2 = 11 \end{aligned}$$

Regla que permite simplificar expresiones

Supongamos que f y g son dos funciones que valen igual en un intervalo alrededor de x_0, salvo tal vez en x_0 mismo. Es decir:
$$f(x) = g(x) \text{ para todo } x \in I, x \neq x_0$$
Entonces:
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x)$$
Esto último debe interpretarse de la siguiente manera: si uno de los límites no existe, el otro tampoco; y si uno de los límites existe, el otro también y es igual al primero. Veamos un ejemplo en el cual es útil esta regla.

EJEMPLO

Volvamos nuevamente al límite
$$\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1}$$
En este caso no es posible usar la regla 3. referida al cociente (¿por qué?). Pero si notamos que el denominador puede factorearse, tendremos:
$$\frac{x - 1}{x^2 - 1} = \frac{x - 1}{(x - 1)(x + 1)}$$

y para $x \neq 1$ se tendrá:

$$\frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x+1}$$

Resumiendo, vale lo siguiente:

$$\frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{x+1} \qquad \text{siempre que } x \neq 1$$

En vista de la regla anterior podemos simplificar y se tendrá la siguiente igualdad:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1}$$

Ahora, para el límite de la derecha puede aplicarse la regla del cociente:

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{\lim\limits_{x\to 1} 1}{\lim\limits_{x\to 1} (x+1)} = \frac{\lim\limits_{x\to 1} 1}{\lim\limits_{x\to 1} x + \lim\limits_{x\to 1} 1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Además de la regla para el límite del cociente de dos funciones ¿qué otras reglas se usaron en el cálculo anterior?

.

EJERCICIOS

Encuentren el valor de los siguientes límites, indicando en cada caso qué reglas se usaron.

1. $\lim\limits_{x\to 0} (-x^2 + 3x + 3)$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{x} - 2x + (x-1)$
3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^2}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{x^3 + 5x}$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$
6. $\lim\limits_{x\to -1} (2x-1)^5$
7. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x+2}{4-x^2}$

Continuidad. Límites que se obtienen por evaluación

Definición

Sea f una función que está definida en un intervalo alrededor de un número x_0. Si

la función tiene límite para $x \to x_0$ y el valor del límite coincide con el valor de la función, diremos que f es **continua** en x_0.

Con la notación de límites, f es continua en x_0 si y sólo si:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Dicho de otra manera, f es continua en x_0 si y sólo si el límite de f cuando $x \to x_0$ es igual a la evaluación de la función en x_0.

La aplicación reiterada de las reglas referidas a las operaciones algebraicas permiten describir una amplia clase de funciones continuas, para las cuales el límite se puede obtener simplemente evaluando. Veamos un par de casos:

1. **El límite de una función polinomial.** Una función polinomial es una suma de monomios (es decir de términos de la forma $a_k x^k$). Para cada uno de esos monomios es claro que:
$$\lim_{x \to x_0} a_k x^k = a_k x_0^k$$
por aplicación de las reglas del producto, de la constante y la potencia (hacerlo en detalle). Combinando esto con la regla de la suma, obtendremos que para cualquier polinomio $p(x)$ se tiene:
$$\lim_{x \to x_0} p(x) = p(x_0)$$
y por lo tanto podemos concluir que **un polinomio es una función continua en todo su dominio**.

2. **El límite de una función racional.** Una función racional es una función que puede expresarse como un cociente de dos polinomios. Supongamos que $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ es una tal función, y que x_0 es un punto de su dominio (y por lo tanto $q(x_0) \neq 0$). Por ser $p(x)$ y $q(x)$ polinomios, tendremos:
$$\lim_{x \to x_0} p(x) = p(x_0)$$
y
$$\lim_{x \to x_0} q(x) = q(x_0) \neq 0$$
Por lo tanto para $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ es aplicable la regla del cociente al calcular el límite cuando $x \to x_0$:
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} p(x)}{\lim_{x \to x_0} q(x)} = \frac{p(x_0)}{q(x_0)} = f(x_0)$$
Lo cual nos permite concluír que **una función racional es continua en todo su dominio**.

3. De la misma forma puede verse que para cualquier función algebraica (esto es: construida a partir de sucesivas combinaciones de operaciones algebraicas a partir de la variable) vale lo mismo:
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \text{ para todo } x_0 \text{ en el dominio de } f$$
y por lo tanto **una función algebraica es continua en todo su dominio**.

.

EJERCICIOS

Determinen los siguientes límites, justificando sus afirmaciones.

1. $\lim_{x\to -7}(2x+5)$
2. $\lim_{t\to 8}\ 5(t+2)-t^2$
3. $\lim_{x\to -1}\dfrac{7x^2-3}{x-1}$
4. $\lim_{t\to -2}\dfrac{t+2}{t}$
5. $\lim_{x\to 3}(x-4)^{\frac{2}{5}}$
6. $\lim_{y\to 5}\dfrac{y-5}{y^2-25}$
7. $\lim_{x\to 0}(3x-27)^{\frac{1}{3}}$
8. $\lim_{x\to 4}\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$
9. $\lim_{t\to 1}\dfrac{t^2+t-2}{t^2-1}$
10. $\lim_{u\to 0}\dfrac{u^3-u^2+u}{u}$

Criterio para límites indeterminados

Lamentablemente, la mayor parte de los límites interesantes no pueden calcularse por simple evaluación. El caso típico de un límite que no puede calcularse evaluando es el de un cociente en el que el denominador tiende 0 (como es el caso de los cocientes incrementales). Hemos visto que en algunos casos puede manipularse algebraicamente la expresión y finalmente eludir la indeterminación. Sin embargo, no siempre este camino es recomendable. El criterio siguiente nos indica cuándo no es conducente intentar una simplificación.

Teorema

Supongamos que tenemos un cociente $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ donde el denominador tiende a 0 cuando $x \to x_0$. Entonces, si el numerador no tiende a 0 cuando $x \to x_0$ el límite del cociente no existe.

Demostración:

Si el límite del cociente existiera, podríamos escribir -por la regla del límite de un producto- lo siguiente:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x).\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} g(x) \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0. \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

lo cual contradice nuestra hipótesis.

El criterio, en una forma práctica nos dice lo siguiente: si en un cociente de dos funciones el denominador tiende a 0, debo mirar el numerador. Si el numerador no tiende a 0, entonces el límite no existe. Si el numerador tiende a 0 entonces es posible intentar una simplificación de la expresión que resuelva la indeterminación.

EJEMPLO

1. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{1}^{\longrightarrow 1}}{\underbrace{h}_{\longrightarrow 0}}$ no existe

2. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{5}^{\longrightarrow 5}}{\underbrace{h^2+h}_{\longrightarrow 0}}$ no existe

3. Estudiemos la existencia del límite: $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{h}{h^3-2h^2}$. En principio, no podemos afirmar nada, puesto que el numerador y denominador tienden a 0. Pero si operamos en el denominador:
$$\frac{h}{h^3-2h^2} = \frac{h}{h(h^2-2h)} = \frac{1}{h^2-2h} \quad \text{para } h \neq 0$$
En base al criterio enunciado esta última expresión no tiene límite cuando $h \to 0$, y por lo tanto el límite original tampoco existe.

EJERCICIOS

En cada caso, determinen si el límite indicado existe o no. En caso de existir encuentren su valor. Justifiquen sus afirmaciones.

1. $\displaystyle\lim_{x\to -3} \frac{x^3+x-6}{x+3}$

2. $\displaystyle\lim_{x\to -3} \frac{x^3+x-6}{(x+3)^2}$

3. $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{4x-x^2}{2-\sqrt{x}}$

4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x-2x^2}{x^2}$

5. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x-1}{x^3 - 2x^2 + x}$

6. Interpreten graficando con Maple.

3.3 Continuidad y derivabilidad

Como aplicación del criterio para límites indeterminados veamos qué sucede en un cociente incremental. En primer lugar, observemos que si en el cociente incremental

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

llamamos $x = x_0 + h$, el mismo queda:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Es claro también que cuando $h \to 0$ se tiene que $x \to x_0$. Entonces podemos afirmar que:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Si el límite anterior existe, entonces el valor de ese límite es la derivada de $f(x)$ en x_0. En ese caso diremos que $f(x)$ es **derivable** en x_0.

Supongamos ahora que la función f es derivable en x_0 y por lo tanto:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Es claro que el denominador en la expresión anterior tiende a 0 cuando $x \to x_0$. Por lo tanto, si $f(x)$ es derivable entonces el límite del numerador también debe ser 0, de acuerdo al criterio anterior. Esto es:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$$

Siendo $f(x_0)$ una constante, lo anterior puede expresarse:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

esto último expresa justamente (ver página 60) que la función $f(x)$ es continua en x_0. Toda la discusión anterior puede resumirse, por lo tanto, en el siguiente Teorema:

Teorema

Toda función que es derivable en un punto es necesariamente continua en dicho punto.

Gráficamente lo anterior es bastante entendible: si por un punto de la gráfica de una función es posible trazar una tangente, entonces necesariamente la gráfica no está cortada en ese punto.

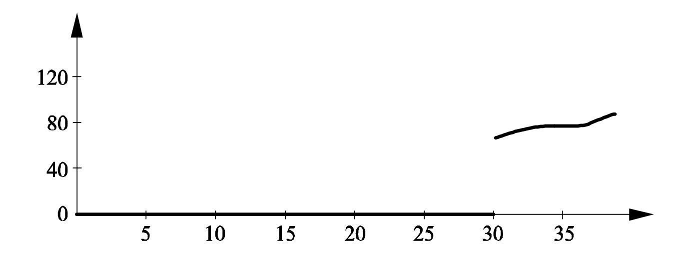
No debemos asumir que la conclusión también funciona al revés. Ojo: no toda función

continua en un punto es derivable en dicho punto.

Por ahora, solamente haremos un reconocimiento gráfico. Más adelante volveremos sobre estos temas.

Límites laterales

Volvamos por un momento a la situación de la página 54. Allí discutimos si existe o no un valor esperado (o límite) para $t \to 30$ en la función cuya gráfica era la siguiente:



En esa ocasión establecimos que no hay un valor esperado que resulte coherente con el comportamiento de la función antes y después de $t = 30$. Sin embargo, si consideramos solamente los valores de t anteriores a 30 el valor esperado es obviamente 0; y si consideramos solamente los valores poteriores a 30 ese valor esperado es 60.

Esta situación la expresamos diciendo que:

- El límite de la frecuencia cardíaca cuando t **tiende a** 30 **por la izquierda es** 0, y lo denotamos:

$$\lim_{t \to 30^-} f(t) = 0$$

o bien:

$$\lim_{\substack{t \to 30 \\ t < 30}} f(t) = 0$$

- El límite de la frecuencia cardíaca cuando t **tiende a** 30 **por la derecha es** 60, y lo denotamos:

$$\lim_{t \to 30^+} f(t) = 60$$

o bien:

$$\lim_{\substack{t \to 30 \\ t > 30}} f(t) = 60$$

Se tiene la propiedad siguiente:

Teorema

El límite $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe si y sólo si ambos límites laterales $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ existen y son iguales.

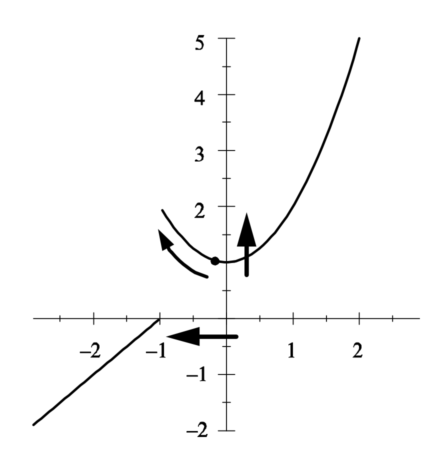
Los límites laterales son particularmente útiles cuando se trata de estudiar el comportamiento de una función definida a trozos en los "puntos de pegado". En esos casos es

conveniente escribir

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$$
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$$

Veamos un ejemplo:

EJEMPLO



Cuando x se aproxima a -1 por la derecha los valores de f se aproximan a 2.

Estudie la existencia del límite $\lim_{x \to -1} f(x)$, donde:

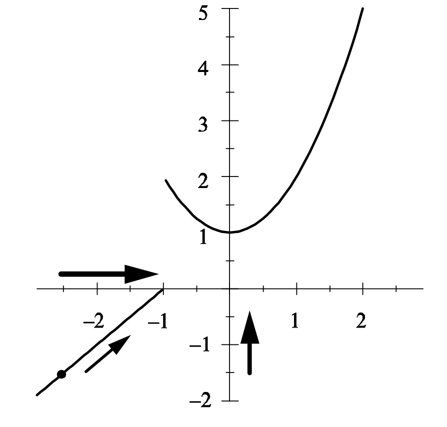
$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{para } x \leq -1 \\ x^2 + 1 & \text{para } x > -1 \end{cases}$$

Vemos que $x = -1$ es justamente el "punto de pegado". Tenemos:

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} x^2 + 1 = (-1)^2 + 1 = 2$$
$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} x + 1 = -1 + 1 = 0$$

Concluimos que el límite no existe, puesto que los límites laterales son diferentes. Las figuras al margen son una interpretación gráfica de la situación anterior.

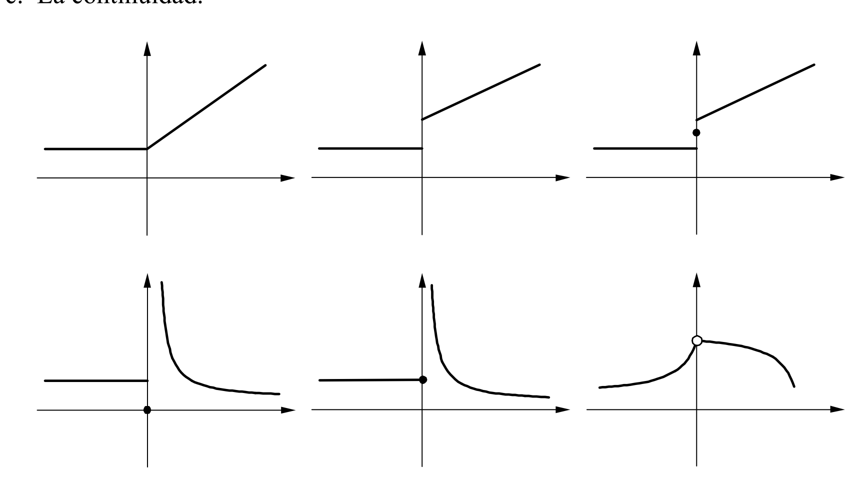




Cuando x se aproxima a -1 por la izquierda los valores de f se aproximan a 0

EJERCICIOS

1. Observando las siguientes gráficas, discutan para $x = 0$ los siguientes aspectos:
   a. La existencia de los límites laterales.
   b. La existencia del límite.
   c. La continuidad.



2. Discutan, por medio de los límites laterales, la existencia de los siguientes límites:

a. $\lim\limits_{x \to 0} |x|$

b. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x}$

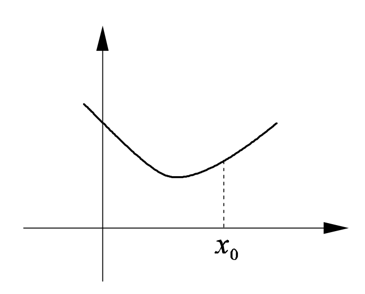
3. Propongan definiciones para los siguientes conceptos:

   a. Una función $f(x)$ se dice **continua por la derecha** en un punto x_0 cuando está definida en ....y además........................

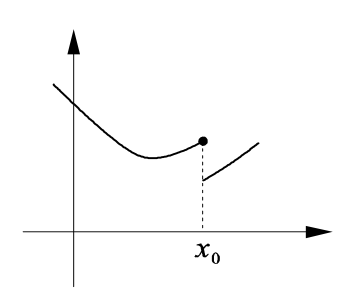
   b. Una función $f(x)$ se dice **continua por la izquierda** en un punto x_0 cuando está definida en ....y además........................

3.4 Continuidad

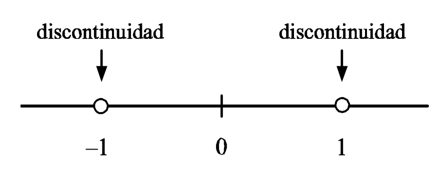
Clasificación de discontinuidades



f es continua en x_0



f no es continua en x_0



Los puntos de continuidad de $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$

Desde un punto de vista visual e intuitivo, una función $f(x)$ es continua en un número x_0 si la gráfica de f no se corta al pasar por x_0.

Recordemos de la sección anterior, que una función $f(x)$ se dice continua en un número x_0 si se cumplen las tres condiciones siguientes:

1. $f(x)$ está definida para $x = x_0$
2. Existe el límite $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$
3. El valor del límite es igual al valor de la función, es decir: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Si para una función f y un valor cualquiera x_0 alguna de las condiciones anteriores no se cumple, diremos que f es **discontinua** en x_0.

EJEMPLO

Si se trata de una función algebraica (por ejemplo: polinomios, funciones racionales, potencias y sus combinaciones) el dominio y los puntos de continuidad son el mismo conjunto. Ilustremos con dos casos concretos:

1. $f(x) = -3x^3 + x$ es una función continua en toda la recta real.
2. $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$ es una función continua en todo el dominio de $f(x)$, es decir en el conjunto $\mathbf{R} - \{1, -1\}$ o bien -en la notación de intervalos- es el conjunto $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$. Esta información la podemos dar también en forma gráfica (ver al margen).

Si se trata de una función definida a trozos, cada intervalo de definición se considera por separado y luego se debe estudiar la continuidad en los puntos de pegado (por medio de los límites laterales). Veamos un ejemplo

EJEMPLO

Consideremos la función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+2} & \text{si } x<-1\\ x & \text{si } -1\le x<1\\ x^2 & \text{si } 1\le x\end{cases}$$

El dominio de $f(x)$ es $\mathbf{R}-\{-2\}=(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$. Por lo tanto -2 es un punto de discontinuidad. La función es continua en $(-\infty,-2)\cup(-2,-1)$ puesto que allí coincide con $\dfrac{1}{x+2}$. Un argumento igual vale en los intervalos $(-1,1)$ y en $(1,+\infty)$. Pero ¿qué sucede en $x=-1$ y en $x=1$? ¿Son o no puntos de discontinuidad? Veamos qué pasa en $x=-1$:

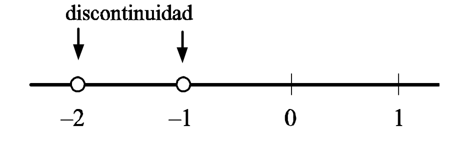
Éste es un punto del dominio de $f(x)$ por lo tanto quedan por comprobar dos cosas para decidir la cuestión de la continuidad: la primera ¿existe el límite?, y en caso afirmativo ¿el límite coincide con el valor de la función en $x=-1$?

Como $f(x)$ está definida a partir de expresiones diferentes a la derecha y a la izquierda de $x=-1$, es natural el uso de límites laterales. Presten atención a lo siguiente:

$$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}}f(x)=\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}}x=-1$$

$$\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}}f(x)=\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{-1+2}=1$$

Vemos entonces que el límite de la función cuando x tiende a -1 no existe, puesto que los límites laterales -aunque existen ambos- son diferentes. En consecuencia $f(x)$ es discontinua en $x=-1$.



Los puntos de continuidad de $f(x)$

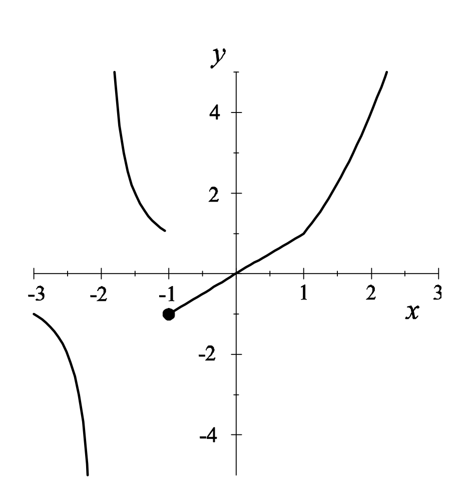
Para $x=1$ tenemos:

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}f(x)=\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}x^2=1^2=1$$

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}f(x)=\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}x=1$$

ambos límites existen y son iguales. Por lo tanto $\lim_{x\to1}f(x)=1$. Además $f(1)=1^2=1$ según la definición de f . Concluimos que $x=1$ es un punto de continuidad de $f(x)$.

El conjunto de puntos de continuidad de f puede escribirse con intervalos de la siguiente manera: $(-\infty,-2)\cup(-2,-1)\cup(-1,+\infty)$. Describimos nuestros resultados en un esquema gráfico (ver al margen).



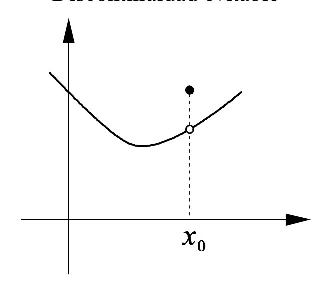
La gráfica de $f(x)$

La gráfica de $f(x)$ puede confirmar nuestro estudio (ver al margen).

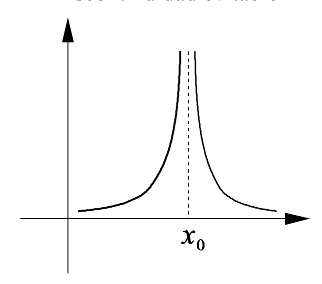
Observemos que, en este ejemplo, el conjunto de puntos de continuidad es más chico que el dominio de la función.

Discontinuidades evitables e inevitables

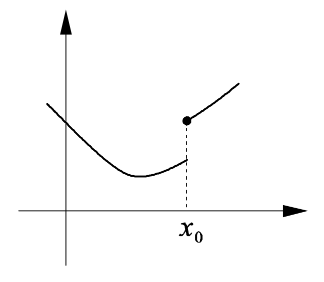
Discontinuidad evitable



Discontinuidad evitable



Discontinuidad inevitable



Discontinuidad inevitable

Supongamos que una función $f(x)$ tiene una dicontinuidad en $x = x_0$:

- Si el límite $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe, diremos que $f(x)$ tiene una **discontinuidad evitable** en $x = x_0$
- Si el límite $\lim_{x \to x_0} f(x)$ no existe, diremos que $f(x)$ tiene una **discontinuidad inevitable** en $x = x_0$

EJERCICIOS

Para cada una de las funciones siguientes

1. Determinen el dominio.
2. Encuentren el conjunto de puntos de continuidad y señalen las discontinuidades.
3. Determinen si las discontinuidades son evitables o inevitables.
4. Resuman lo anterior en un esquema sobre una recta.
5. Interpreten gráficamente usando Maple y copien los gráficos en sus cuadernos o carpetas.

   a. $f(x) = |x|$

   b. $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

   c. $f(x) = \dfrac{|x|}{x^2}$

   d. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x}{x^2-x} & \text{si } x < 1 \\ 2x & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

   e. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

   f. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

   g. $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$

   h. $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 + x}$

Comportamiento en una discontinuidad inevitable.

Saltos

Diremos que una función $f(x)$ tiene un salto en x_0 si los límites laterales de $f(x)$ para x tendiendo a x_0 por la derecha y por la izquierda existen y son distintos.

.

EJERCICIOS

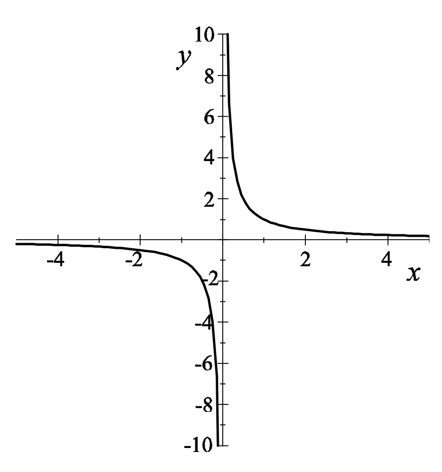
Señalen para las funciones del ejercicio anterior los puntos en los que hay un salto.

Asíntotas

El siguiente tipo de discontinuidad inevitable que discutiremos es cuando los valores de la función se hacen grandes y positivos o grandes y negativos cuando nos aproximamos al punto de discontinuidad. Veamos un ejemplo:

EJEMPLO

Consideremos una función sencilla: $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Es claro que tiene una discontinuidad en $x = 0$, puesto que 0 no está en el dominio. La discontinuidad es inevitable porque el límite cuando x tiende a 0 no existe (la razón -que ya hemos dado cantidad de veces- es que el denominador tiende a 0 mientras que el numerador no lo hace).



La gráfica de $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Ahora bien, si x es pequeño y positivo, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ es grande y positivo. Es más, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ puede hacerse tan grande y positivo como queramos, haciendo a x suficientemente pequeño y positivo. Por ejemplo, si quisiéramos que $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sea mayor que 10^{200} bastaría tomar valores de x menores que 10^{-200}.

Indicamos este hecho de la siguiente manera:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Lo anterior no dice que f tenga límite (en el sentido que hemos dado hasta ahora) cuando x tiende a 0 por la derecha, sino que es una descripción del comportamiento de $f(x)$ cuando x se aproxima a 0 por la derecha.

Algo similar ocurre cuando x tiende a 0 por la izquierda. Los valores de $f(x)$ se hacen, en este caso, cada vez más grandes y negativos. Describimos este comportamiento escribiendo:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Lo visto en el ejemplo anterior es típico de las funciones racionales en los puntos donde tienen una discontinuidad inevitable. En efecto, supongamos que tenemos la función racional:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

y que $f(x)$ tiene una discontinuidad inevitable en $x = x_0$. Puesto que la discontinuidad es inevitable simplificando los factores comunes $(x - x_0)$ presentes en el numerador y el denominador encontramos una expresión equivalente para $f(x)$, vá-lida para $x \neq x_0$:

$$f(x) = \frac{p_1(x)}{q_1(x)} \qquad \text{para } x \neq x_0$$

en la cual $p_1(x_0) \neq 0$ mientras que $q_1(x_0) = 0$.

Cuando nos aproximamos a la discontinuidad por la derecha y la izquierda, obtendremos:

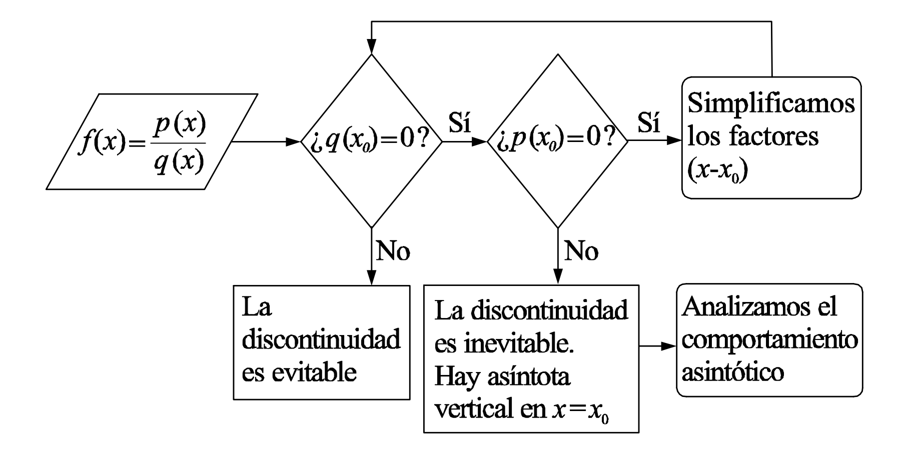
$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0^+} f(x) &= \pm\infty \\ \lim_{x \to x_0^-} f(x) &= \pm\infty \end{aligned}$$

el signo de los infinitos dependerá de los signos de $p_1(x)$ y de $q_1(x)$ en los valores de x que estemos considerando en cada caso (a la derecha y a la izquierda de $x = x_0$).

En este caso diremos que la recta vertical $x = x_0$ es una **asíntota vertical** de la gráfica de $f(x)$.

El **comportamiento asintótico** de $f(x)$ en la discontinuidad inevitable es la determinación efectiva de los límites anteriores. El signo del infinito estará determinado por el signo de $p_1(x)$ y el signo de $q_1(x)$ a la derecha y a la izquierda de la discontinuidad.

Veamos el procedimiento para estudiar un punto de discontinuidad de una función racional



EJEMPLO

Consideremos la función racional:

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2}{x^3 - 2x^2 + x}$$

y supongamos que queremos determinar las asíntotas y el comportamiento asintótico de $f(x)$.

En primer lugar, estudiamos los puntos de discontinuidad, que coinciden con los ceros del denominador. Tenemos:

$$x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x-1)^2$$

El dominio de $f(x)$ es entonces el conjunto $\mathbf{R} - \{0, 1\}$, siendo los puntos de discontinuidad $x = 0$ y $x = 1$. Comencemos por $x = 0$. El numerador se anula también en $x = 0$, por lo tanto es posible simplificar algún factor x en la expresión de $f(x)$:

$$f(x) = \frac{x(x^2 - x)}{x(x^2 - 2x + 1)} = \frac{x^2 - x}{x^2 - 2x + 1} \qquad \text{para } x \neq 0$$

En esta última expresión el denominador no se anula, y por lo tanto la discontinuidad es evitable. Podemos calcular el valor del límite:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{0}{1} = 0$$

Continuamos con $x = 1$. Comprobamos que el numerador también se anula en $x = 1$, y por lo tanto será posible simplificar algún factor $(x - 1)$. Como solamente nos interesan valores próximos a 1, tenemos:

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 2x + 1} = \frac{x(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{x}{x-1} \qquad \text{para } x \neq 0 \text{ y } 1$$

En esta expresión el denominador se anula en $x = 1$, mientras que el numerador no lo hace. Tenemos entonces una discontinuidad inevitable y por lo tanto la recta vertical $x = 1$ es una asíntota vertical.

Para determinar el comportamiento asintótico en $x = 1$ calculamos los límites para x tendiendo a 1 por la izquierda y por la derecha:

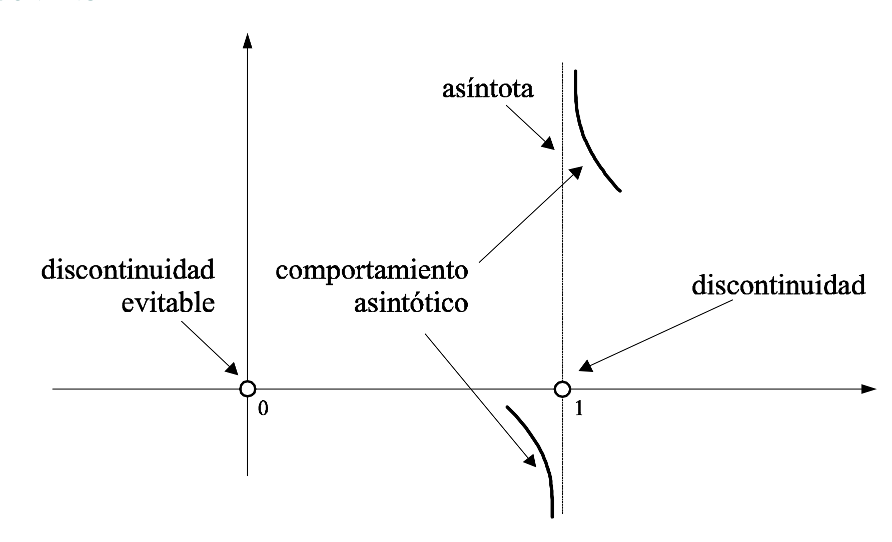
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{\overbrace{x}^{\longrightarrow 1}}{\underbrace{x-1}_{\longrightarrow 0^+}} = +\infty$$

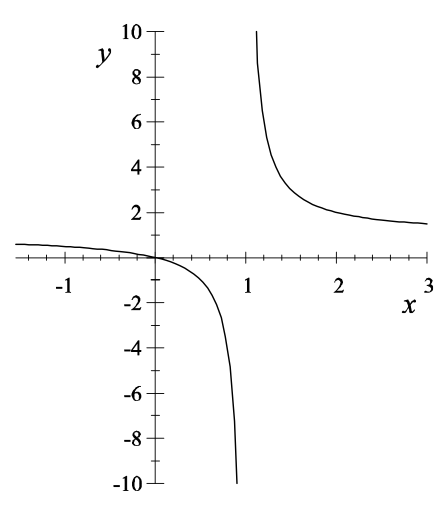
puesto que para $x > 1$ tanto el numerador como el denominador son positivos.

Por la izquierda, o sea cuando $x < 1$, el denominador es negativo y cuando x está próximo a 1 el numerador es positivo. Por lo tanto:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{\overbrace{x}^{\longrightarrow 1}}{\underbrace{x-1}_{\longrightarrow 0^-}} = -\infty$$

Ilustramos con un esquema





La gráfica de $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2}{x^3 - 2x^2 + x}$

Un gráfico hecho con Maple confirma nuestro estudio, notemos que la discontinuidad evitable no se evidencia en el mismo, y que hemos usado la opción `discont=true` (ver al margen).

EJERCICIOS

1. Determinen las asíntotas verticales y el comportamiento asintótico en las discontinuidades inevitables de las funciones del ejercicio de la página 68.

2. Determinen las asíntotas verticales de las siguientes funciones:

   a. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

   b. $g(x) = \dfrac{-1}{(x-1)^2}$

   c. $h(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 2x}$

Aclaraciones importantes respecto de los límites infinitos

Hemos dicho que las expresiones $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ son descriptivas del comportamiento de $f(x)$ cuando x se aproxima a una discontinuidad inevitable. No pueden considerarse sin riesgos a los símbolos "$+\infty$" y "$-\infty$" como números y operar con ellos, ni tampoco aplicar las reglas de los límites sin tomar precauciones. Veámoslo en algunos ejemplos:

1. Es claro que la suma de dos números grandes y positivos es un número grande y positivo. Por lo tanto la suma de dos funciones que tienden a $+\infty$ también tiende a $+\infty$.

2. Es claro también que la suma de dos números grandes y negativos es un número grande y negativo. Por lo tanto la suma de dos funciones que tienden a $-\infty$ también tiende a $-\infty$.

3. Sin embargo si una de las funciones tiende a $+\infty$ mientra que la otra tiende a -∞, nada puede afirmarse en general del comportamiento de la suma. Por ejemplo, sabemos que:
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$$
pero:
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x-1}{x^2} = -\infty$$

4. Una situación similar se da con el producto de dos funciones cuyos valores se hacen grandes -positivos o negativos- el producto también se hará grande con un signo que dependerá de los signos de los factores.

5. Sobre el cociente de dos funciones que tienden a $\pm\infty$, nada puede afirmarse en general. El comportamiento del cociente debe estudiarse en cada caso. Por ejemplo el comportamiento en cero de un cociente del tipo:
$$\frac{1/x^n}{1/x^m}$$
depende de los valores de n y de m. Piensen tres ejemplos diferentes para esta situación.

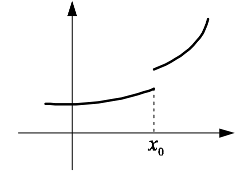
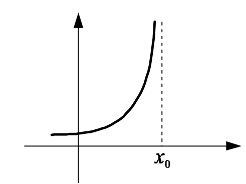
6. Las tablas siguientes resumen lo que puede esperarse del comportamiento asintótico de la suma y el producto de funciones cuyos comportamientos son conocidos. No son para memorizar sino para usar como referencia. En las tablas están contemplados los casos en que las funciones tienen límite (finito) en el punto.

	g	$f+g$		
f		$+\infty$	$-\infty$	L
	$+\infty$	$+\infty$	IND	$+\infty$
	$-\infty$	IND	$-\infty$	$-\infty$
	M	$+\infty$	$-\infty$	$L+M$

	g	$f\cdot g$				
f		$+\infty$	$-\infty$	$L>0$	$L<0$	$L=0$
	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	IND
	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	IND
	$M>0$	$+\infty$	$-\infty$	REGLAS USUALES		
	$M<0$	$-\infty$	$+\infty$			
	$M=0$	IND	IND			

Resumen de clasificación de discontinuidades

La tabla siguiente resume lo dicho respecto a los tipos de dicontinuidades que hemos clasificado

<table>
<tr><th colspan="2">EXISTE $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$</th><th>NO EXISTE $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$</th></tr>
<tr><td>f está definida en x_0
y
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$</td><td>$f$ no está definida en x_0
ó
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$</td><td>$f$ tiene una discontinuidad inevitable en x_0</td></tr>
<tr><td>f es continua en x_0</td><td>f tiene una discontinuidad evitable en x_0</td><td rowspan="2">Comportamientos cerca de x_0
Existen los límites laterales:
salto o discontinuidad de primera especie:
</td></tr>
<tr><td>x_0</td><td>x_0</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Alguno de los límites laterales es $\pm\infty$:
asíntota vertical
</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Otros comportamientos:
Por ejemplo, una gran oscilación de los valores de f cuando nos acercamos a x_0. La gráfica de sen$(1/x)$ ilustra esta idea en x=0.</td></tr>
</table>

EJERCICIOS

Estudien la continuidad de las siguientes funciones. Clasifiquen las discontinuidades y estudien el comportamiento asintótico de las mismas (si corresponde)

1. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si} & x < -1 \\ -1 & \text{si} & -1 < x \leq 0 \\ -x^2 & \text{si} & 0 < x \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{si} & x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si} & x \geqslant 0 \end{cases}$

3. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 3x}$

4. $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$

5. $f(x) = \dfrac{x}{1 - x^2}$

6. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

7. $g(x) = \dfrac{-1}{(x-1)^2}$

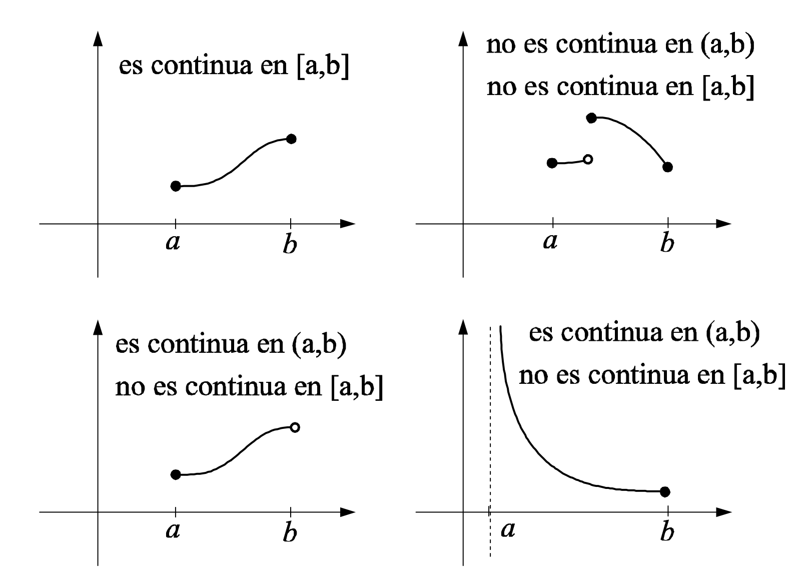
8. $h(x) = \dfrac{2x}{(x+2)^2}$

3.5 El teorema del valor intermedio

Continuidad en un intervalo cerrado

- Una función se dice continua en un intervalo abierto (a, b) si es continua en cada punto de (a, b)
- Una función se dice continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ si es continua en el interior (a, b) y además:
  - $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$
  - $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

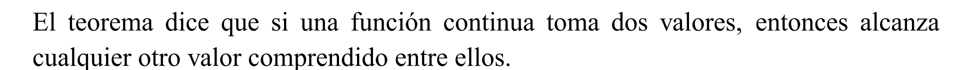
Ilustremos lo anterior con algunas gráficas:

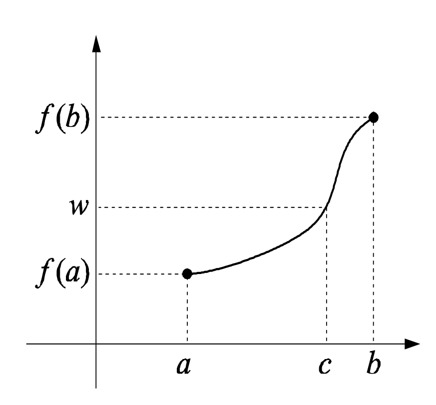


Enunciaremos a continuación un teorema importante referido a funciones continuas en un intervalo cerrado. La demostración del mismo está fuera del alcance de este curso.

Teorema

Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y sea w un número cualquiera comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$. Entonces existe un valor c en el intervalo $[a, b]$ tal que $f(c) = w$.





El Teorema del valor intermedio

El teorema dice que si una función continua toma dos valores, entonces alcanza cualquier otro valor comprendido entre ellos.

Notemos que el teorema garantiza la existencia de al menos un valor c para el cual $f(c) = w$. Pero hay dos cosas que el teorema **no dice**:

- no dice que éste sea el único valor donde la función vale w.
- no dice nada acerca de cómo encontrar ese valor.

EJERCICIOS

Usen el teorema del valor intermedio para demostrar las siguientes propiedades:

1. Si $f(x)$ es continua en un intervalo $[a, b]$ y $f(a)$ y $f(b)$ tienen diferente signo, entonces $f(x)$ se anula en algún valor del intervalo (a, b).

2. Si $f(x)$ es continua en un intervalo J y no se anula en J entonces es siempre positiva en J o siempre negativa en J (se dice que $f(x)$ **conserva su signo** en J). El intervalo J puede ser abierto, cerrado o semiabierto, finito o infinito.

Veamos en un ejemplo una aplicación muy importante de esta propiedad.

EJEMPLO

Usemos lo anterior para resolver desigualdades del tipo $f(x) < 0$ (ó $f(x) \leq 0$) o más generalmente, para estudiar el signo de la función $f(x)$, siempre que podamos identificar los ceros y las discontinuidades de $f(x)$. Por ejemplo, estudiemos el signo de la función racional:

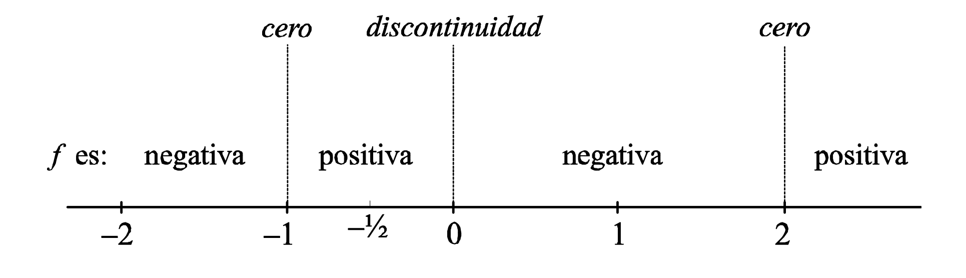
$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x}$$

Sabemos que $f(x)$ es continua en toda la recta, salvo en $x = 0$, es decir es continua en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$. Por otra parte, $f(x)$ se anula solamente en -1 y 2. Tenemos la recta dividida en 4 intervalos, en cada uno de los cuales $f(x)$ conserva su signo, a saber: $(-\infty, -1)$; $(-1, 0)$; $(0, 2)$ y $(2, +\infty)$. Basta tomar un valor de prueba en cada intervalo para determinar el signo de $f(x)$ en cada uno de ellos. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} f(-2) &= -2 < 0 \\ f(-\frac{1}{2}) &= \frac{5}{2} > 0 \\ f(1) &= -2 < 0 \\ f(3) &= \frac{4}{3} > 0 \end{aligned}$$

Resulta entonces:

- $f(x)$ es positiva estrictamente en $(-1, 0)$ y en $(2, +\infty)$
- $f(x)$ es negativa estrictamente en $(-\infty, -1)$ y en $(0, 2)$



EJERCICIOS

Estudien el signo de las siguientes funciones.

1. $f(x) = 4x^2 - x - 3$
2. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$
3. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$
4. $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$
5. $f(x) = \dfrac{x^3-x}{2+x}$

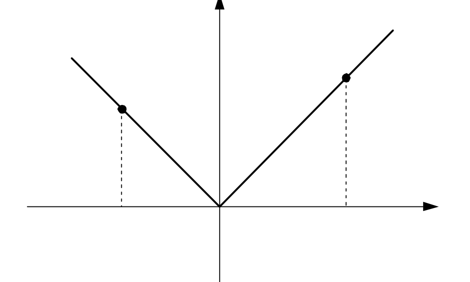
6. $f(x)=\begin{cases} x+3 & \text{si} \quad x<0 \\ \dfrac{1}{2}(x-2)^2+1 & \text{si} \quad 0\leq x\leq 2 \\ x+6 & \text{si} \quad 2<x \end{cases}$

Capítulo 4
Estudio de Funciones

4.1 Funciones derivables y no derivables

Hemos interpretado geométricamente a la derivada de una función $f(x)$ en un valor a como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ por el punto $(a, f(a))$. Ahora bien ¿siempre existirá esa tangente? A la derivada la hemos definido como un límite (el límite del cociente incremental cuando el incremento de la variable independiente tiende a 0), y la existencia o no de la derivada se corresponde con la existencia o no de ese límite. Veamos un ejemplo:

EJEMPLO



La gráfica de la función $f(x) = |x|$ tiene un punto anguloso en $x = 0$

Analizar en qué valores es derivable la función valor absoluto. Primero interpretamos gráficamente (ver al margen).

Es claro que si $x < 0$ la gráfica tiene tangente por el punto $(x, -x)$. Y esa tangente es $y = -x$, recta que coincide con la gráfica de la función para $x < 0$. Lo mismo sucederá para $x > 0$. Pero algo extraño pasa en $x = 0$; la gráfica tiene allí un punto anguloso y no parece posible apoyar allí una tangente.

Veamos, el cociente incremental en $x = 0$ de la función valor absoluto es:

$$\frac{|0+h| - |0|}{h} = \frac{|h|}{h}$$

Y queremos calcular el límite de esa expresión cuando $h \to 0$. Recordemos que el valor absoluto es una función definida a trozos y que, justamente, $x = 0$ es el punto de pegado; conviene entonces estudiar los límites laterales:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h} = -1$$

Comprobamos que los límites laterales son distintos. La función no es derivable en $x = 0$.

Hemos encontrado que hay funciones (aun funciones sencillas y usuales como las

del ejemplo anterior) que no son derivables en algunos valores. Para terminar con el ejemplo del valor absoluto notemos que si bien no es derivable en $x = 0$ sí es continua en ese valor.

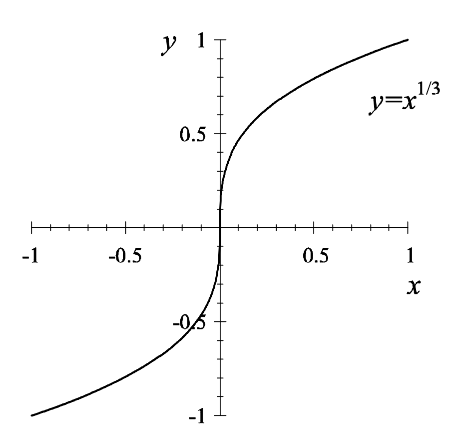
Haciendo referencia al Teorema de la página 63, allí vimos que una función derivable es necesariamente continua. El ejemplo anterior nos muestra que la recíproca de esa afirmación no es cierta (el valor absoluto es continuo en $x = 0$ pero no es derivable en ese valor).

Ya podemos describir gráficamente dos situaciones en las que una función no es derivable en un valor a:

- La gráfica de $f(x)$ tiene un punto anguloso en $(a, f(a))$
- La gráfica de $f(x)$ se corta en $x = a$

Veamos un ejemplo de una situación diferente a las anteriores:

EJEMPLO



La gráfica de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ tiene una tangente vertical en $x = 0$

La función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ no es derivable en $x = 0$. En efecto, planteemos el límite del cociente incremental:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{0+h} - \sqrt{0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{2/3}}$$

que claramente no existe (puesto que el denominador se anula y el numerador no lo hace). La función es continua, su gráfica no es angulosa, pero la pendiente de las secantes se hace arbitrariamente grande cuando nos acercamos a 0. Ver figura al margen.

La comprobación de la derivabilidad o no de una función en determinado conjunto es importante para los temas que siguen. Esencialmente lo que haremos es estudiar la derivada para conocer la función. El instrumento para ello es el Teorema del valor medio que requiere entre sus hipótesis la derivabilidad de la función. Esto es, podemos usar el teorema y sus consecuencias solamente si la función es derivable.

Derivada de una función definida a trozos

Para estudiar la derivabilidad de una función definida a trozos en un punto de pegado, supongamos que tenemos:

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \le a \\ k(x) & \text{si } x > a \end{cases}$$

donde $g(x)$ es derivable para $x < a$ y $k(x)$ es derivable para $x > a$. Entonces podemos afirmar que:

$$f'(x) = \begin{cases} g'(x) & \text{si } x < a \\ k'(x) & \text{si } x > a \end{cases}$$

¿Qué pasa en $x = a$? Esta pregunta la podemos responder de dos maneras. La primera es planteando el cociente incremental de $f(x)$ en $x = a$ e investigando si el

límite de ese cociente existe. Eso implicará el estudio de los límites laterales:

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{\substack{x\to a \\ x>a}} \frac{k(x)-g(a)}{x-a}$$

$$\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{\substack{x\to a \\ x<a}} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

si esos límites existen y son iguales, la función será derivable en a y el valor del límite será el de la derivada $f'(a)$. Esto es lo que hicimos en el ejemplo de la página 79.

Otra forma de hacerlo es estudiando los límites laterales de las derivadas:

$$\lim_{x\to a^+} k'(x)$$

$$\lim_{x\to a^-} g'(x)$$

los que expresan con qué pendiente llega cada función a $x = a$. Obviamente, para que f sea derivable en a ambas funciones tendrán que llegar a a con la misma pendiente. Si además la función f es continua en $x = a$ podremos afirmar que la función es derivable en a.

EJERCICIOS

1. Estudien la derivabilidad de las siguientes funciones, interpreten gráficamente.
   a. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$
   b. $f(x) = |x+3|$
2. Determinen los valores de α de manera que la función $f(x)$ resulte derivable en $x = 0$.
$$f(x) = \begin{cases} (\alpha - \frac{1}{2})x + 1 & x \leq 0 \\ \alpha x^2 + 4\alpha^2 & x > 0 \end{cases}$$

4.2 El teorema del valor medio

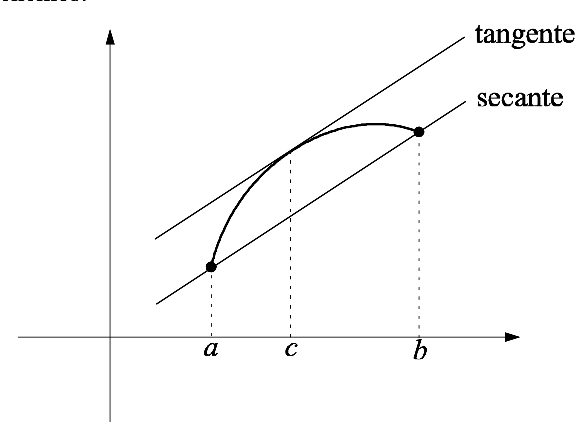
Este teorema, formulado originalmente por el matemático Lagrange (1736-1813), permite obtener información sobre una función estudiando su derivada. El mismo establece una relación entre la variación media de una función en un intervalo y la variación instantánea en un punto interior. Concretamente, enunciamos:

Teorema

(del Valor medio o de Lagrange): Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y que es derivable en el intervalo abierto (a, b). Entonces existe un valor c en el intervalo (a, b) tal que se verifica:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

Gráficamente tenemos:

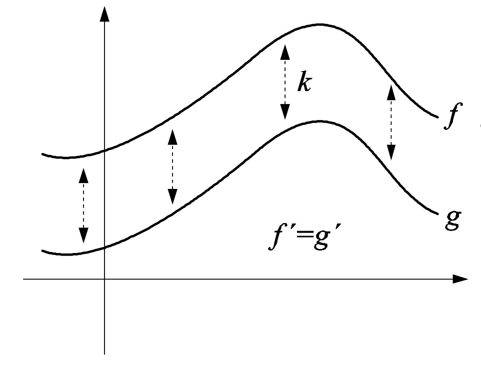


el teorema nos dice que, para una función derivable, hay una tangente por un punto interior cuya pendiente es la misma que la de la recta secante por los extremos.

EJEMPLO

Como ejemplo del uso que podemos dar al teorema anterior demostremos el siguiente hecho, que es por cierto bastante intuitivo:

- Supongamos que $f(x)$ es una función continua en un intervalo cerrado $I=[a,b]$ y derivable en el interior del mismo. Entonces, si $f'(x)=0$ para todo $x\in(a,b)$ se tiene que $f(x)$ es constante en I.
  Para verlo, consideremos un $x>a$ en I. El teorema anterior nos asegura que existe un c en el interior de I tal que:
  $$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c)=0 \text{ por nuestra hipótesis}$$
  por lo tanto debe ser
  $$\begin{aligned} f(x)-f(a) &= 0\\ f(x) &= f(a)\end{aligned}$$
- Una consecuencia de la proposición anterior es que si dos funciones, digamos $f(x)$ y $g(x)$ tienen la misma derivada en un intervalo entonces difieren en una constante. En efecto, supongamos que ambas funciones son continuas en un intervalo I como el de antes y derivables en el interior de I. Consideremos a la función diferencia $f(x)-g(x)$; su derivada es la diferencia de las derivadas, y como éstas son iguales, será nula en el interior de I. Por el punto anterior se tendrá:
  $$f(x)-g(x)=k \text{ constante}$$
  Ver al margen para una interpretación gráfica de este hecho.



$f'=g'$ si y sólo si $f-g=k$

4.3 Crecimiento y decrecimiento

Veamos cómo el Teorema del valor medio nos permite conocer el comportamiento de

una función estudiando su derivada. En primer lugar, demos un par de definiciones

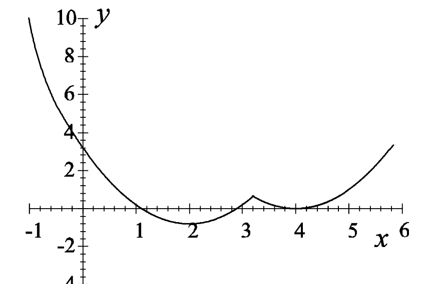
Definición

Sea $f(x)$ una función y sea I un intervalo contenido en el dominio de $f(x)$.

Diremos que $f(x)$ es **creciente** en I si cada vez que $x_1 < x_2$ se tiene que $f(x_1) < f(x_2)$, cualesquiera sean x_1 y x_2 en el intervalo I.

Diremos que $f(x)$ es **decreciente** en I si cada vez que $x_1 < x_2$ se tiene que $f(x_1) > f(x_2)$, cualesquiera sean x_1 y x_2 en el intervalo I.

EJEMPLO



La función es creciente en $[2, 3.25]$ y en $[4, 6]$. Es decreciente en $[-1, 2]$ y en $[3.25, 4]$

Si conocemos la gráfica de una función, es bastante sencillo determinar en qué intervalos es creciente y en cuales es decreciente. Por ejemplo si tenemos la gráfica del margen, vemos que la función es creciente en $[2, 3.25]$ y en $[4, 6]$ mientras que es decreciente en $[-1, 2]$ y en $[3.25, 4]$.

ACTIVIDAD

1. Supongamos que una función es creciente en un intervalo I ¿qué aspecto tienen las tangentes a la gráfica de la función en I?
2. Supongamos que una función es decreciente en un intervalo I ¿qué aspecto tienen las tangentes a la gráfica de la función en I?
3. ¿Intuyen alguna relación entre el signo de la derivada de la función en I y el hecho de que la función sea creciente o decreciente en I?

Efectivamente, es más o menos intuitivo que hay cierta relación entre el hecho de que la función sea creciente y la derivada sea positiva, asi como entre función decreciente y derivada negativa. Precisaremos esa relación en el teorema siguiente:

Teorema

Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo $[a, b]$ y derivable en (a, b). Entonces:

1. Si $f'(x) > 0$ en (a, b) entonces $f(x)$ es creciente en $[a, b]$.
2. Si $f'(x) < 0$ en (a, b) entonces $f(x)$ es decreciente en $[a, b]$

Demostración:

Supongamos que $f'(x) > 0$ en (a, b) , y sean $x_1 < x_2$ dos números en (a, b). Queremos demostrar que $f(x_1) < f(x_2)$. Como $[x_1, x_2] \subset [a, b]$ resulta que $f(x)$ es

continua en $[x_1, x_2]$ y derivable en (x_1, x_2). El teorema del valor medio nos asegura la existencia de un número c perteneciente a (x_1, x_2) tal que:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

Ahora bien, como $f'(x) > 0$ en (a, b) resulta que $f'(c) > 0$ y por lo tanto

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$$

El denominador de este último cociente es positivo puesto que $x_1 < x_2$, y por lo tanto el numerador también es positivo, o sea:

$$f(x_2) - f(x_1) > 0$$

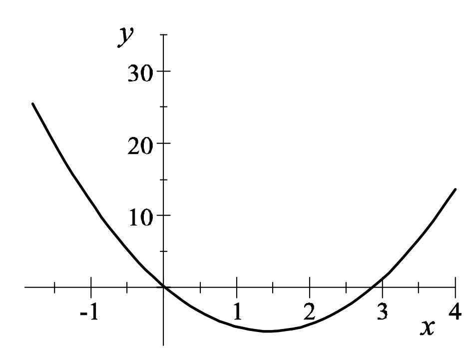
y por lo tanto:

$$f(x_2) > f(x_1)$$

como queríamos demostrar. Un razonamiento similar se hace para el caso $f'(x) < 0$.

El teorema anterior permite reducir el estudio de los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función derivable en un intervalo cualquiera (finito o infinito, abierto, semiabierto o cerrado) al estudio del signo de la derivada de la función en el interior del intervalo. Ese estudio (el del signo de la derivada) puede hacerse como en el ejemplo de la página 77 considerando los intervalos de continuidad de la derivada, encontrando sus ceros y tomando valores de prueba.

EJEMPLO



La gráfica de la derivada
$f'(x) = 3x^2 - 8x$

Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = x^3 - 4x^2$.

Paso 1. Estudiamos la derivabilidad y calculamos la derivada. Nuestra función es un polinomio, y por lo tanto es derivable en toda la recta. Su derivada también es un polinomio de grado 2 y su gráfica, por lo tanto, es una parábola:

$$f'(x) = 3x^2 - 8x$$

que es continua en toda la recta.

Paso 2. Encontramos los ceros de la derivada. Debemos resolver la ecuación

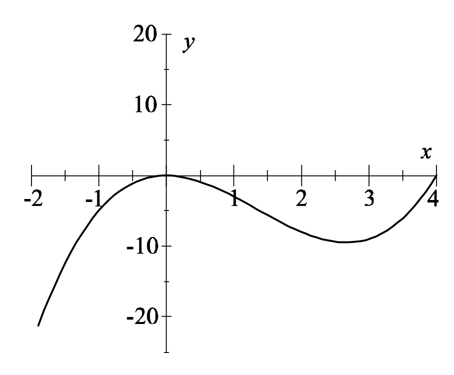
$$\begin{aligned} 3x^2 - 8x &= 0 \\ x(3x - 8) &= 0 \end{aligned}$$

las soluciones son $x = 0$ y $x = \frac{8}{3}$.

Paso 3. Identificamos los intervalos donde conserva el signo y evaluamos en valores de prueba. La derivada es continua y se anula únicamente en 0 y $8/3$. Por lo tanto conserva el signo en los intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 8/3)$, $(8/3, +\infty)$. Una tabla ordena la información:

Intervalo	$(-\infty, 0)$	$(0, 8/3)$	$(8/3, +\infty)$
valor de prueba	-1	2	3
evaluación	$f'(-1) = 11$	$f'(2) = -4$	$f'(3) = 3$
f'	positiva	negativa	positiva
f	creciente	decreciente	creciente

Podemos graficar en la computadora y confirmar nuestro resultado (ver al margen).



La gráfica de $f(x) = x^3 - 4x^2$

EJERCICIOS

1. Determinen los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las funciones:
   a. $f(x) = 5 - 3x^2 - 2x^3$
   b. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$
2. La recíproca del teorema anterior no es cierta. Una función puede ser creciente en un intervalo sin que su derivada sea estrictamente positiva en ese intervalo. Muestren que $f(x) = x^3$ es creciente en toda la recta. ¿Es cierto que su derivada es positiva siempre?
3. Lo siguiente plantea una aparente contradicción con el teorema anterior. Sea $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Su derivada es $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ que es siempre negativa. Por lo tanto $f(x)$ debe ser una función decreciente en toda la recta. Sin embargo $f(-1) = -1 < f(1) = 1$. ¿Dónde está el error?

En vista de lo anterior, al estudiar intervalos de crecimiento y decrecimiento debemos ser cuidadosos en asegurarnos que estamos trabajando dentro de un intervalo en el que se verifican las hipótesis del teorema: continuidad hasta el borde (en el caso de un intervalo cerrado) y derivabilidad en el interior. El procedimiento debe ser:

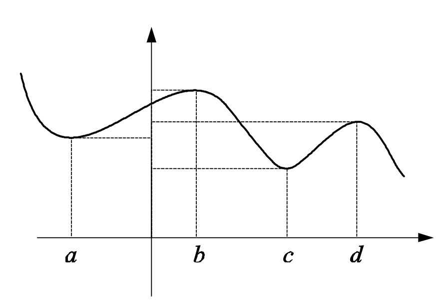
- excluir los puntos de discontinuidad de la función
- excluir los ceros y los puntos de discontinuidad de la derivada (algunos pueden coincidir con los anteriores)
- estudiar el signo de la derivada en los intervalos determinados por las exclusiones anteriores

EJERCICIOS

1. Determinen los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función:
$$f(x) = \begin{cases} -x+3 & \text{si } x \le -1 \\ \dfrac{2x+1}{x} & \text{si } -1 < x \le 1 \\ x+1 & 1 < x \end{cases}$$
2. Analicen los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $S(l) = l^2 + \dfrac{144}{l}$ en el intervalo $(0, +\infty)$. Deduzcan que la misma alcanza su mínimo

valor en $\sqrt[3]{72}$. Recordar la Actividad de la página 9.

4.4 Extremos locales



$f(x)$ alcanza mínimos locales en a y en c.
$f(x)$ alcanza máximos locales en b y en d

Desde el comienzo del curso hemos dicho que uno de nuestros intereses mayores es determinar exactamente dónde una función alcanzaba un valor máximo o un valor mínimo. Ahora estamos en condiciones de avanzar en ese sentido. Empezamos dando dos definiciones:

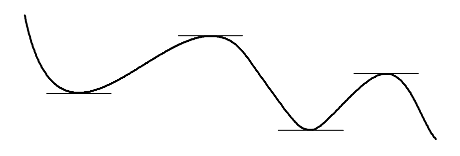
Definición

Sea c un número en el dominio de una función $f(x)$.

Diremos que $f(x)$ alcanza en c un **máximo local** si $f(c) \geq f(x)$ para todo x en un intervalo alrededor de c.

Diremos que $f(x)$ alcanza en c un **mínimo local** si $f(c) \leq f(x)$ para todo x en un intervalo alrededor de c.

En cualquiera de los casos anteriores diremos que $f(x)$ alcanza en c un **extremo local**.



Por los puntos de la gráfica en los que hay un extremo local pasa una tangente horizontal

Tenemos el siguiente criterio para extremos locales. El criterio establece que, cuando $f(x)$ es una función derivable, por los puntos de la gráfica en los que hay un extremo local pasa una tangente horizontal.

Teorema

Supongamos que $f(x)$ es una función derivable en un valor c y que $f(x)$ alcanza en c un extremo local. Entonces $f'(c) = 0$.

Demostración:

Supongamos que en c se alcanza un máximo local. Entonces, para h suficientemente pequeño se tendrá:

$$\begin{aligned} f(c+h) &\leq f(c) \\ f(c+h) - f(c) &\leq 0 \end{aligned}$$

Para el cociente incremental tendremos:

$$\begin{aligned} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} &\leq 0 \text{ si } h \text{ es positivo} \\ \frac{f(c+h) - f(c)}{h} &\geq 0 \text{ si } h \text{ es negativo} \end{aligned}$$

De donde podemos afirmar que:

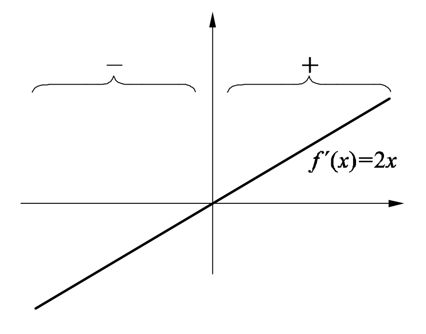
$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} &\leq 0 \\ \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} &\geq 0 \end{aligned}$$

.

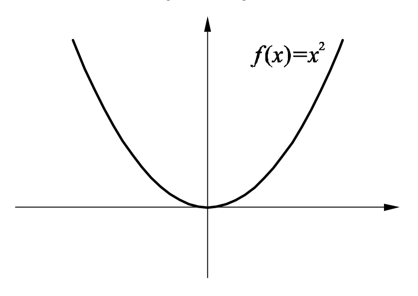
.

Como $f(x)$ es derivable en c, ambos límites existen y son iguales a $f'(c)$. Por lo tanto debe ser $f'(c) = 0$ como queríamos demostrar.

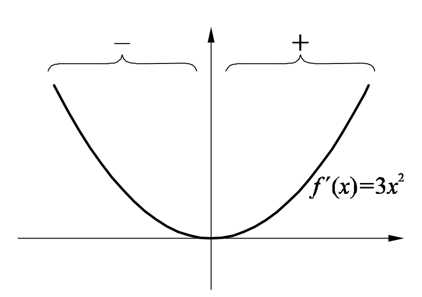
Números críticos



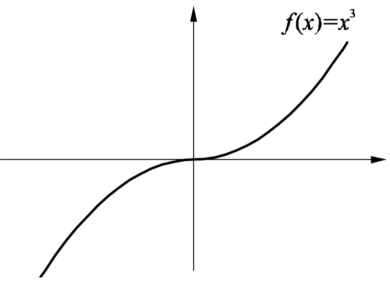
La derivada $f'(x) = 2x$ cambia de signo en $x = 0$



La función $f(x) = x^2$ tiene un mínimo local en $x = 0$



La derivada $f'(x) = 3x^2$ no cambia de signo en $x = 0$



La función $f(x) = x^3$ no tiene un extremo local en $x = 0$

Definición

Un número c se dice un **número crítico** de una función $f(x)$, si es un punto de continuidad y sucede alguna de las siguientes cosas:

$f(x)$ es derivable en c y $f'(c) = 0$, o bien

$f(x)$ no es derivable en c

De acuerdo al teorema anterior podemos enunciar la siguiente propiedad:

Si una función continua alcanza un extremo local en un número c entonces c es un número crítico.

¿Cuándo un número crítico es un extremo local? Y en tal caso ¿cuándo es un máximo local y cuándo es un mínimo local? Las respuestas a estas preguntas van de la mano del estudio de los intervalos de crecimiento y decrecimiento por medio del signo de la derivada. En efecto si c es un punto de anulación de la derivada pueden pasar dos cosas:

- La derivada cambia de signo al pasar por c. En este caso hay un extremo local, puesto que cambia el sentido de crecimiento de la función.
  Ejemplo: $f(x) = x^2$ en $x = 0$. Ver al margen.
- La derivada no cambia de signo al pasar por c. En este caso no hay extremo local. La función no cambia el sentido de crecimiento aunque tiene una tangente horizontal.
  Ejemplo: $f(x) = x^3$ en $x = 0$. Ver al margen.

EJEMPLO

En el ejemplo de la página 84 estudiamos los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x^3 - 4x^2$. Determinamos primero los ceros de la derivada, obteniendo por tanto los número críticos $x = 0$ y $x = 8/3$. En ambos casos comprobamos que la derivada cambia de signo:

Intervalo	$(-\infty, 0)$	$(0, 8/3)$	$(8/3, \infty)$
f'	positiva	negativa	positiva

Esta tablita nos permite concluir que en $x = 0$ se alcanza un máximo local (f es creciente antes y decreciente después $\cap$), y que en $x = 8/3$ se alcanza un mínimo local (f es decreciente antes y creciente después $\cup$).

.

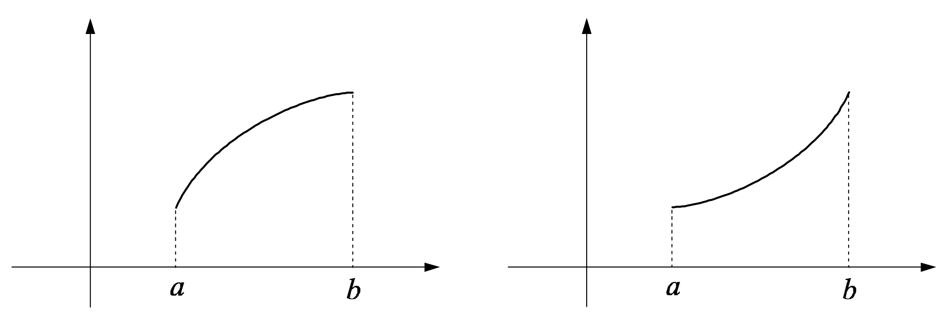
EJERCICIOS

Determinen los valores críticos de las siguientes funciones, y digan en cada uno si es un máximo local, un mínimo local o ninguna de esas cosas.

1. La función del Ejemplo de la página 83.
2. Las funciones de los incisos 1a y 1b del primer Ejercicio de la página 85.
3. Las funciones del segundo Ejercicio de la página 85.

4.5 Concavidad

Hemos visto que el signo de la derivada determina el crecimiento de la función. Veremos ahora otro aspecto que es importante a la hora de conocer la forma de la gráfica de un función y cómo estudiarlo. Observemos las gráficas siguientes:



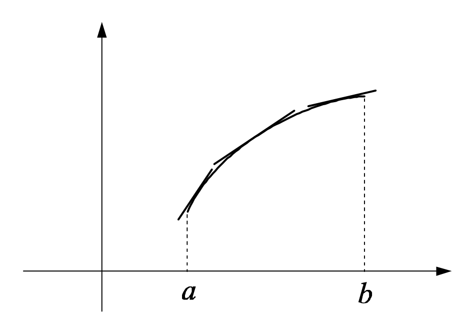
ambas funciones son crecientes en el intervalo $[a, b]$, sin embargo sus gráficas aparecen diferentes en algún sentido.

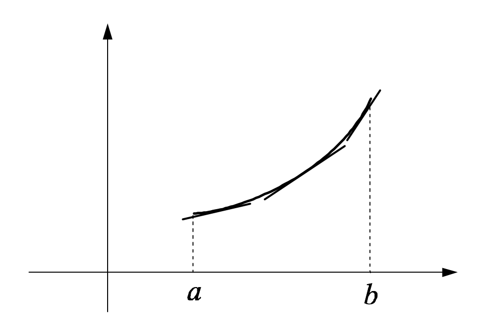
EJERCICIOS

Supongan que las gráficas anteriores representan la posición en función del tiempo de un objeto con movimiento rectilíneo. ¿Qué sucede con la velocidad del móvil de la primera gráfica? ¿Y con la velocidad del móvil de la segunda gráfica? ¿Cómo podrían interpretar sus respuestas en términos de la aceleración de cada móvil?

En la gráfica de la izquierda, desde una perspectiva geométrica, cada vez que trazamos la tangente por un punto la gráfica queda -por lo menos cerca de ese punto- *por debajo* de la tangente. De la misma manera, en la gráfica de la derecha la gráfica queda *por*

arriba de la tangente.





En el primer caso diremos que la gráfica es cóncava hacia abajo en $[a, b]$, y en el segundo diremos que es cóncava hacia arriba en $[a, b]$.

Observemos que en el primer caso las pendientes de las tangentes son decrecientes, mientras que en el segundo caso las pendientes son crecientes. O sea, la concavidad está relacionada con el sentido de crecimiento de la derivada, y por lo tanto con el signo de la derivada segunda (como lo sugiere el caso de la posición, la velocidad y la aceleración). Concretamente usaremos -sin demostración- el siguiente criterio para la concavidad:

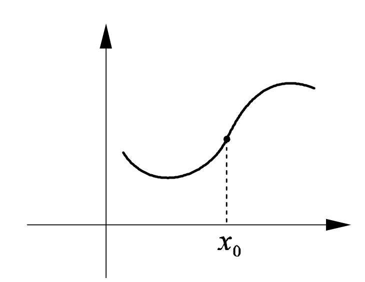
Teorema

Si para todo x en un intervalo I se tiene que $f''(x) > 0$, entonces la gráfica de $f(x)$ es **cóncava hacia arriba** en I.

Si para todo x en un intervalo I se tiene que $f''(x) < 0$, entonces la gráfica de $f(x)$ es **cóncava hacia abajo** en I.

Definición

Un punto de continuidad de la gráfica de la función en el cual la concavidad cambia de sentido se denomina un **punto de inflexión**.

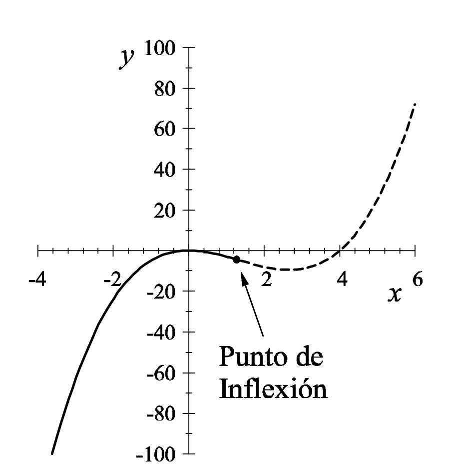


La gráfica tiene un punto de inflexión en $(x_0, f(x_0))$

EJEMPLO

1. Consideremos una función cuadrática general $f(x) = ax^2+bx+c$. Las derivadas son:
$$\begin{aligned} f'(x) &= 2ax + b \\ f''(x) &= 2a \end{aligned}$$
Por lo tanto tendremos que la gráfica es cóncava hacia arriba cuando $a > 0$; y será cóncava hacia abajo cuando $a < 0$. Como corresponde a una parábola bien educada.

2. Estudiemos la concavidad de la función del Ejemplo de la página 84: $f(x) =$



Los intervalos de concavidad de $f(x) = x^3 - 4x^2$

$x^3 - 4x^2$. Sus derivadas son:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 8x \\ f''(x) &= 6x - 8 \end{aligned}$$

La segunda derivada es continua en toda la recta -de hecho es lineal- y se anula solamente en $x = 4/3$. Puesto que tiene pendiente positiva, es creciente. Tendremos entonces que:

$$\begin{aligned} f''(x) &< 0 \text{ para } x < 4/3 \\ f''(x) &> 0 \text{ para } x > 4/3 \end{aligned}$$

Y por lo tanto $f(x)$ es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 4/3]$ y es cóncava hacia arriba en $[4/3, +\infty)$. Como la función es continua, el punto $(4/3, f(4/3)) = (4/3, -128/27)$ es un punto de inflexión.

EJERCICIOS

Estudien la concavidad de las funciones siguientes. Generen un gráfico de computadora para confirmar sus resultados.

1. $f(x) = \dfrac{1}{x}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$
3. $f(x) = 3x^3 - x$
4. $f(x) = 2x + 8$

4.6 Comportamiento en el infinito

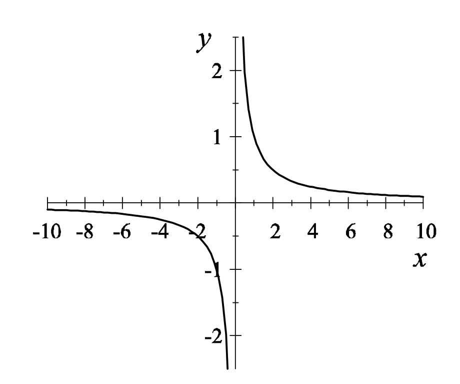
Lo visto hasta ahora (continuidad, asíntotas verticales, extremos locales, intervalos de crecimiento, concavidad) nos permiten hacernos una idea bastante aproximada de la forma que tendrá la gráfica de una función. Un último aspecto que consideraremos es el "comportamiento en el infinito" de la función. Con esto nos referimos al comportamiento de los valores de la función cuando la variable se hace grande y positiva o grande y negativa. Concretamente:

Definición

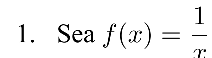
- Diremos que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ si los valores de $f(x)$ están tan próximos a L como queramos, tomando x suficientemente grande y positivo.
- Diremos que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ si los valores de $f(x)$ están tan próximos a L como queramos, tomando x suficientemente grande y negativo

En cualquiera de los casos anteriores diremos que la recta de ecuación $y = L$ es una **asíntota horizontal** de la gráfica de $f(x)$.

EJEMPLO



La recta $y = 0$ es la única asíntota horizontal de la gráfica de $f(x) = 1/x$



1. Sea $f(x) = \dfrac{1}{x}$

   Entonces $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$. La única asíntota horizontal de la gráfica es la recta $y = 0$.

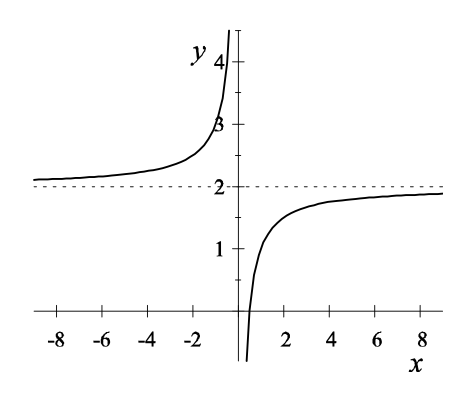
2. Sea $f(x) = \dfrac{2x-1}{x}$. Para estudiar el comportamiento en el infinito conviene escribir:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x-1}{x} \\ &= \frac{2x}{x} - \frac{1}{x} \\ &= 2 - \frac{1}{x} \end{aligned}$$

   Entonces:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} 2 - \frac{1}{x} = 2$$

   La recta $y = 2$ resulta la única asíntota horizontal de la gráfica de $f(x) = 2 - \dfrac{1}{x}$

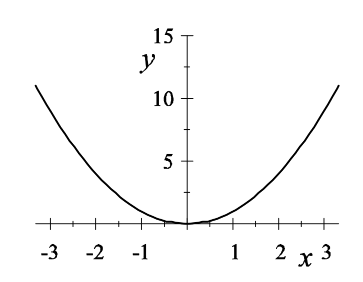


La recta $y = 2$ es la única asíntota horizontal de $f(x) = \dfrac{2x-1}{x}$

3. Sea $f(x) = x^2$. En este caso los valores de la función se hacen grandes y positivos, tanto para x grande y positivo como para x grande y negativo.

   Cuando esto sucede lo indicamos así:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} f(x) &= +\infty \\ \lim_{x\to-\infty} f(x) &= +\infty \end{aligned}$$



Cuando $x \to \pm\infty$ los valores de la función $f(x) = x^2$ tienden a $+\infty$

Para estas últimas expresiones valen las advertencias hechas en el caso del comportamiento asintótico: son maneras de describir el comportamiento de la función cuando la variable se hace grande y positiva o grande y negativa y no se puede operar con estos símbolos como si fueran números (ver tablas de la pag.73).

Analizaremos el comportamiento en el infinito de algunas de las funciones más comunes.

Comportamiento en el infinito de un polinomio.

1. Supongamos que tenemos un monomio, esto es un polinomio de un único término:

$$p(x) = ax^n$$

   Un breve análisis muestra que el comportamiento en el infinito de este monomio

depende del signo del coeficiente a y de que el exponente n sea par o impar. Resumimos en una tabla:

		$\lim_{x\to+\infty} ax^n$	$\lim_{x\to-\infty} ax^n$
n par	$a > 0$	$+\infty$	$+\infty$
n par	$a < 0$	$-\infty$	$-\infty$
n impar	$a > 0$	$+\infty$	$-\infty$
n impar	$a < 0$	$-\infty$	$+\infty$

2. Consideremos ahora, por ejemplo, el polinomio $p(x) = -5x^5 + 2x^4 - x^3 + 1$. El límite

$$\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = \lim_{x\to\pm\infty} -5x^5 + 2x^4 - x^3 + 1$$

no es posible calcularlo directamente porque aparecen indeterminaciones. Si sacamos factor común $-5x^5$en $p(x)$ tendremos:

$$\begin{aligned} p(x) &= -5x^5\left(1 + \frac{2x^4}{-5x^5} - \frac{x^3}{-5x^5} + \frac{1}{-5x^5}\right) \\ &= -5x^5\left(1 + \frac{2}{-5}\frac{1}{x} - \frac{1}{-5}\frac{1}{x^2} + \frac{1}{-5}\frac{1}{x^5}\right) \end{aligned}$$

En esta última expresión, el factor entre paréntesis tiende a 1 cuando $x \to \pm\infty$ por lo tanto:

$$\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = \lim_{x\to\pm\infty} -5x^5 + 2x^4 - x^3 + 1 = \lim_{x\to\pm\infty} -5x^5 = \mp\infty$$

De manera que el comportamiento en $\pm\infty$ del polinomio es el comportamiento de su monomio de mayor grado. Este resultado es general, puesto que el mismo procedimiento puede usarse con cualquier polinomio. Por lo tanto para un polinomio $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ tendremos:

$$\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = \lim_{x\to\pm\infty} a_nx^n$$

EJERCICIOS

Encuentren los siguientes límites:

1. $\lim_{x\to+\infty} -7x^4 + 2x - 1$
2. $\lim_{x\to-\infty} -x^3 - x^2 + 3$
3. $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{2}x^6 + x^7$
4. $\lim_{x\to+\infty} x^2 + x$

Comportamiento en el infinito de una función racional

Una función racional es un cociente de polinomios. Pongamos $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios. Nos interesa el comportamiento de $r(x)$ cuando $x \to \pm\infty$. A menos que $p(x)$ o $q(x)$ sean constantes tenemos un cociente de dos funciones, ambas tendiendo a $\pm\infty$, y por lo tanto es uno de los casos en los que el límite está

indefinido. Para definir la situación procedemos con $p(x)$ y $q(x)$ como lo hicimos en el ejemplo anterior. Lo ilustramos con un ejemplo:

$$r(x) = \frac{-2x^2 + x - 1}{x^3 + 3}$$

Tenemos:

$$r(x) = \frac{-2x^2\left(1 + \frac{1}{-2x} - \frac{1}{-2x^2}\right)}{x^3\left(1 + \frac{3}{x^3}\right)} = \frac{-2x^2}{x^3}\frac{\overbrace{\left(1 + \dfrac{1}{-2x} - \dfrac{1}{-2x^2}\right)}^{\text{tiende a 1 cuando } x \to \pm\infty}}{\underbrace{\left(1 + \dfrac{3}{x^3}\right)}_{\text{tiende a 1 cuando } x \to \pm\infty}}$$

En consecuencia:

$$\lim_{x\to\pm\infty} r(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2x^2}{x^3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2}{x} = 0$$

En general si

$$\begin{aligned} p(x) &= a_n x^n + \text{ monomios de grado menor} \\ q(x) &= b_m x^m + \text{ monomios de grado menor} \end{aligned}$$

Entonces el límite:

$$\lim_{x\to\pm\infty} r(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

Hay tres posibilidades:

1. $n > m$. La última expresión es el monomio $\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}$ que tiende a $\pm\infty$ dependiendo del signo del coeficiente y de la paridad de $n - m$.

2. $n < m$. La expresión es de la forma $\frac{a_n}{b_m}\frac{1}{x^{m-n}}$ que tiende a 0. En este caso la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal de la gráfica de $r(x)$.

3. $n = m$. La expresión es de la forma $\frac{a_n}{b_m}$ (constante) y por tanto ése es el límite. En este caso la recta $y = \frac{a_n}{b_m}$ es una asíntota horizontal de la gráfica de $r(x)$.

EJERCICIOS

1. Expresen las condiciones anteriores en términos de los grados de los polinomios $p(x)$ y $q(x)$.

2. Encuentren los siguientes límites:

   a. $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x+3}{5x+7}$

   b. $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+1}{x^2+3}$

   c. $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-12x^2}{4x^2+12}$

   d. $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{7x^3}{x^3-3x^2}$

   e. $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^5+3}{-x^2+x}$

f. $\lim_{x \to \pm\infty} 2x + \frac{1}{x}$

g. $\lim_{x \to \pm\infty} -1 + \frac{x^2}{x+3}$

3. El mismo procedimiento que usamos para determinar el comportamiento en el infinito de una función racional, se puede aplicar también al caso de que las potencias de x sean no enteras o negativas. Saquen factor común la mayor potencia de x del numerador y del denominador y determinen los siguientes límites:

   a. $\lim_{x \to +\infty} \frac{2\sqrt{x} + x^{-1}}{3x - 7}$

   b. $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}}$

   c. $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^{\frac{3}{5}} + x^{\frac{1}{3}} + 7}{x^{\frac{8}{5}} + 3x + \sqrt{x}}$

4.7 Estudio de una función racional

El estudio de una función es una actividad de cierta complejidad, que integra los distintos conceptos que hemos visto en el capítulo. Ese estudio concluye con la realización de una gráfica que contenga los elementos determinados previamente. El estudio debe incluir siempre los siguientes pasos:

1. **Estudio del dominio**. Describir, en lo posible, el dominio en términos de intervalos.

2. **Estudio de la continuidad**. Esto incluye:
   - Puntos de discontinuidad.
   - Clasificación de discontinuidades en dichos puntos mediante el estudio de la existencia del límite.
   - Existencia de asíntotas verticales en los puntos de discontinuidades inevitables; esto surge del ítem anterior.

3. **Comportamiento en el infinito**. Existencia de asíntotas horizontales.

4. **Derivabilidad**. Cálculo de la derivada donde la misma existe e identificación de los puntos donde no existe.

5. **Ceros de la derivada**. Estudio del signo de la derivada y determinación de los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Determinación de extremos locales, para lo cual se estudian **todos** los puntos críticos.

6. **Cálculo de la segunda derivada y estudio de su signo**. Intervalos de concavidad. Puntos de inflexión.

7. **Puntos notables**. Intersección con los ejes x e y.

8. **Construcción de un tabla de valores** que incluya a los puntos críticos, puntos de inflexión, etc.

9. **Dibujo de la gráfica** en el cual se señalen las características principales y que sea coherente con el estudio realizado. Un consejo: si la gráfica no se ajusta a lo que Uds. esperaban, seguramente hay un error en sus cuentas, REVISEN.

Forma estándar de una función racional

Algunas funciones racionales pueden expresarse en una forma que facilita su estudio, simplificando las cuentas y proporcionando una idea previa de cómo puede ser su gráfica. Describamos el método y después lo ilustramos con algunos ejemplos. Supongamos que nuestra función es:

$$h(x) = \frac{p(x)}{s(x)}$$

y además que el grado del numerador es mayor o igual que el grado del denominador. Podemos entonces dividir el polinomio $p(x)$ por el polinomio $s(x)$ obteniendo un cociente $q(x)$ y un resto $r(x)$ que verifican lo siguiente:

$$p(x) = q(x)s(x) + r(x) \text{ con } r(x) = 0 \text{ o grado } r(x) < \text{ grado de } s(x)$$

Esto nos permite escribir a nuestra función racional de la siguiente manera, llamada forma estándar:

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{p(x)}{s(x)} = \frac{q(x)s(x) + r(x)}{s(x)} = \frac{q(x)s(x)}{s(x)} + \frac{r(x)}{s(x)} \\ &= \overbrace{q(x)}^{COCIENTE} + \frac{\overbrace{r(x)}^{RESTO}}{\underbrace{s(x)}_{DENOMINADOR}} \end{aligned}$$

EJEMPLO

Escribamos en la forma estándar a la función racional

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 1}{x - 1}$$

Vemos que el grado del numerador es mayor que el del denominador, y entonces hacemos la división:

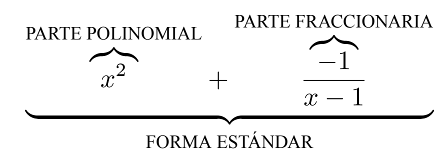
x^3	$-x^2$	-1	$x - 1$
x^3	$-x^2$		x^2 (COCIENTE)
0	0	-1	
		(RESTO)	

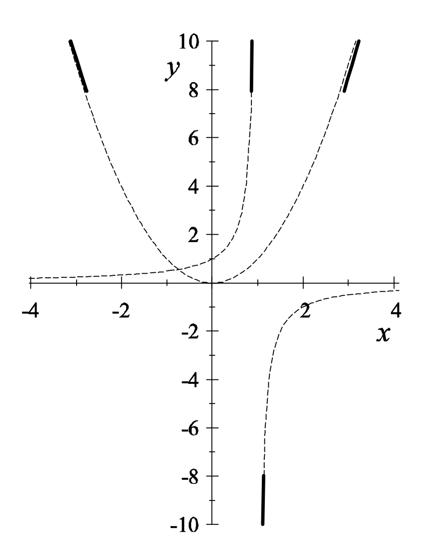
Podemos en consecuencia escribir:

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 1}{x - 1} = x^2 + \frac{-1}{x - 1}$$

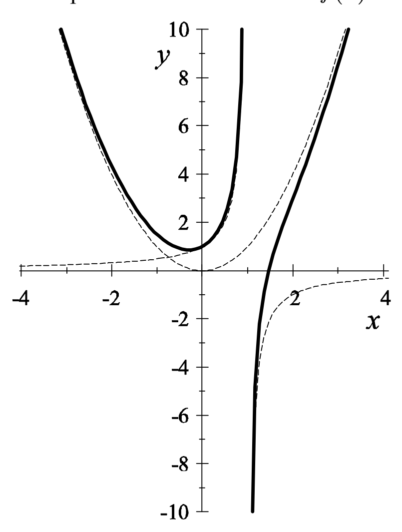
esta es la forma estándar de $f(x)$. En la misma identificamos dos términos: la parte

polinomial y la parte fraccionaria:





Las gráficas de la parte polinomial x^2 y la parte fraccionaria $\frac{-1}{x-1}$ exponen el comportamiento asintótico de $f(x)$.



La gráfica de $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 1}{x-1}$

La forma estándar tiene dos ventajas. La primera es que en muchos casos simplifica los cálculos, al bajar el grado del numerador en la parte fraccionaria; esto no es menor: en el ejemplo anterior la derivada usando la forma estándar puede calcularse así:

$$f'(x) = 2x + (x-1)^{-2}$$

mientras que la versión original hay que derivarla usando la regla del cociente, la cual origina la expresión:

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 2x)(x-1) - (x^3 - x^2 - 1)}{(x-1)^2}$$

que si bien es igual a la anterior, es mucho más complicada para manipular.

La segunda ventaja es que expone el comportamiento asintótico de la función. En efecto tenemos:

- En el infinito el comportamiento de la función racional es el de la parte polinomial, puesto que la parte fraccionaria tiende a 0.
- En las discontinuidades inevitables el comportamiento asintótico es el de la parte fraccionaria (puesto que la parte polinomial es continua siempre).

Con referencia al ejemplo anterior, estos hechos los expresamos de la siguiente manera:

- Para x grande $f(x) \approx x^2$ (leemos "efe se comporta como equis cuadrado").
- Para x próximo a 1 $f(x) \approx \frac{-1}{x-1}$ (leemos: "efe se comporta como menos uno sobre equis menos uno")

Si graficamos la parte polinomial ($y = x^2$) y la parte fraccionaria ($y = \frac{-1}{x-1}$) esas gráficas nos dirán cómo es la gráfica de $f(x)$ para x grandes (positivos y negativos) y para x próximos a 1.

El estudio completo de la función debería confirmar esas formas. De hecho la gráfica obtenida con una computadora es la figura al margen.

EJERCICIOS

Para las funciones racionales siguientes determinen la forma estándar. Estudien los términos polinomial y fraccionario para determinar el comportamiento asintótico y usen la información para proponer un posible gráfico para la función.

1. $f(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 - 1}$

2. $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^2}$

3. $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$

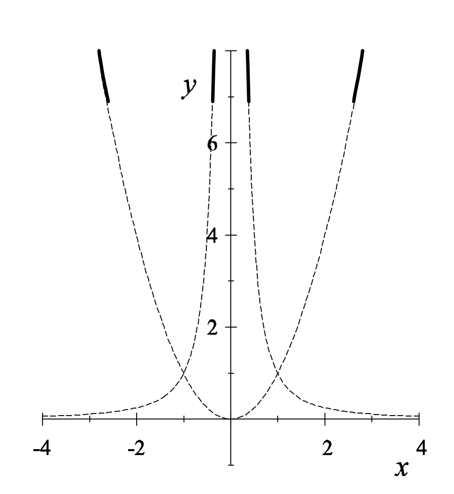
4. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$

5. $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x}$

Estudio completo de una función racional

EJEMPLO

Estudiemos la función racional $f(x) = \dfrac{x^4 + 1}{x^2}$. Previamente a los pasos 1 a 9 descriptos en la pag.94 determinamos la forma estándar y el comportamiento asintótico.



Estudio preliminar: gráficas de la parte polinomial y la parte fraccionaria.

Forma estándar. Estudio preliminar: Se tiene $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$. Por lo tanto para x grande tenemos $f(x) \approx x^2$ y para x próximo a 0 (punto de discontinuidad) se tiene $f(x) \approx \dfrac{1}{x^2}$. Graficamos la parte polinomial y la fraccionaria y señalamos el comportamiento de f tal como muetra la figura.

1. **Dominio:** son todos los reales distintos de 0.



$$Dom(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

2. **Continuidad**: Una función racional es continua (y derivable) en todo su dominio. En $x = 0$ existe una discontinuidad inevitable, como se vio en el estudio previo. Hay una asíntota vertical y los límites laterales para $x \to 0$ son:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 + \frac{1}{x^2} = +\infty$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2 + \frac{1}{x^2} = +\infty$$

3. **Comportamiento en el infinito**: También queda claro a partir del estudio previo:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^2 = +\infty$$

Si bien no hay asíntota horizontal, establecimos que el comportamiento de $f(x)$ para x grande es como el de x^2.

4. **Derivabilidad**: Ya lo hemos dicho, por ser racional $f(x)$ es derivable en todo su dominio. Usando la forma estándar:

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x^3}$$

5. **Números críticos**. Signo de la derivada: Veamos dónde se anula $f(x)$. Hay que

resolver la ecuación:

$$\begin{aligned} 2x - \frac{2}{x^3} &= 0 \\ 2x &= \frac{2}{x^3} \\ 2x^4 &= 2 \\ x^4 &= 1 \end{aligned}$$

cuyas únicas raíces reales son $x = 1$ y $x = -1$

Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Los intervalos a considerar son: $(-\infty, -1)\,; (-1, 0)\,; (0, 1)$ y $(1, +\infty)$. En cada uno de ellos la derivada de $f(x)$ es continua y no se anula. Por lo tanto conserva su signo, y ese signo determina si $f(x)$ es creciente o decreciente en el intervalo. Consideramos un valor de prueba en cada intervalo para conocer el signo de $f'(x)$, por ejemplo: -2, -1/2, 1/2, 2. Evaluamos $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(-2) &= -\frac{15}{4} < 0 \\ f'(-\frac{1}{2}) &= 15 > 0 \\ f'(\frac{1}{2}) &= -15 < 0 \\ f'(2) &= \frac{15}{4} > 0 \end{aligned}$$

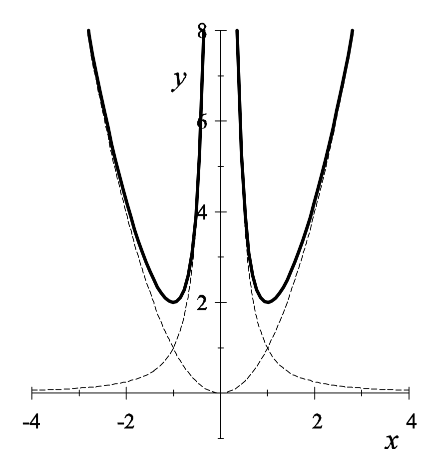
6. **Derivada segunda**. Concavidad: La derivada segunda es:

$$f''(x) = 2 + \frac{6}{x^4}$$

que es siempre positiva, y por tanto no hay puntos de inflexión.

Resumimos la información obtenida en los pasos 5 y 6 en una tabla:

Intervalos	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
signo de $f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
signo de $f''(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$
crecimiento de $f(x)$	decreciente	creciente	decreciente	creciente
concavidad	$\cup$	$\cup$	$\cup$	$\cup$
extremos	en -1 hay un mínimo local		en 1 hay un mínimo local	



La gráfica de $f(x) = \dfrac{x^4+1}{x^2}$

7. **Puntos notables**: Comprueben que no hay intersección de la gráfica con los ejes coordenados

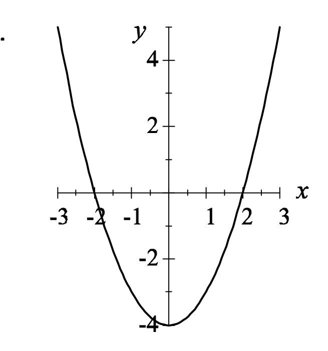
8. y 9.**Tabla de valores y gráfica**.

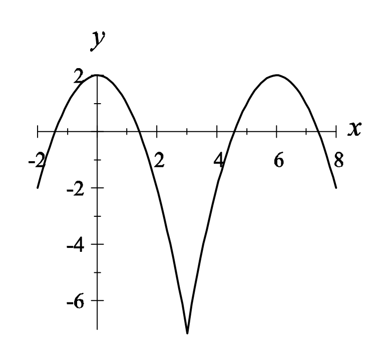
x	$f(x)$
-1	2
1	2

EJERCICIOS

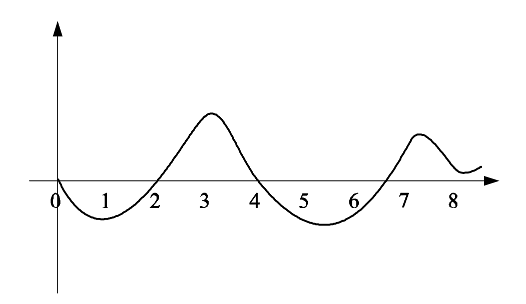
1. Para las funciones del ejercicio de la página 96 hagan un estudio similar al del ejemplo anterior y grafíquenlas de acuerdo con el estudio realizado.

2. Cada una de las siguientes gráficas corresponde a la **derivada** de una función $f(x)$. Identifiquen los intervalos en los que $f(x)$ es creciente o decreciente y los extremos locales.

a.


b.


3. La siguiente es la gráfica de la derivada de una función $f(x)$.



Respondan:

a. ¿En qué intervalos $f(x)$ es creciente o decreciente?

b. ¿En qué valores tiene $f(x)$ un máximo o un mínimo locales?

c. ¿En qué intervalos es $f(x)$ cóncava hacia arriba o hacia abajo?

d. ¿Cuáles son los puntos de inflexión?

4.8 Funciones inversas

La imagen de una función

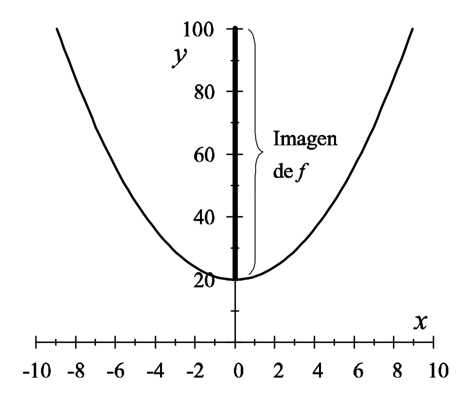
Consideremos una función numérica $f(x)$ con un dominio D. Al conjunto de valores que la función $f(x)$ efectivamente alcanza se lo llama **imagen de** f y se lo denota $\text{Im}(f)$ o bien $f(D)$ cuando se quiere tener presente el dominio de la función. En la notación de conjuntos:

$$\text{Im}(f) = f(D) = \{y/\text{existe un } x \in D \text{ tal que } f(x) = y\}$$

Gráficamente, la imagen puede verse como la proyección sobre el eje y de la gráfica de la función $f(x)$.



EJEMPLO



La imagen de $f(x)$ puede verse como la proyección de la gráfica sobre el eje y.

La cuestión de encontrar "a mano" la imagen de una función dada no es fácil. Implica determinar para qué valores de y la ecuación $f(x) = y$ tiene o no tiene solución. Por ejemplo, la función del dibujo es $f(x) = x^2 + 20$; en este caso ¿Cuándo un valor y pertenece a la imagen de f ? De acuerdo a la definición, cuando exista un x tal que $f(x) = y$. Es decir, debe existir un x tal que:

$$\begin{aligned} x^2 + 20 &= y \\ x^2 &= y - 20 \end{aligned}$$

para que esta última ecuación admita solución real, debe ser $y - 20 \geq 0$, o sea: $y \geq 20$. En tal caso tendremos como soluciones $x = 0$ para $y = 20$; o bien $x = \pm\sqrt{y - 20}$ para $y > 20$.

EJERCICIOS

1. Muestren que si $f(x) = mx + b$ es una función lineal entonces $\mathrm{Im}(f)$ es toda la recta.

2. Muestren que si $f(x) = ax^2 + bx + c$ es una función cuadrática, entonces $\mathrm{Im}(f)$ es una semirrecta del tipo $(-\infty, k]$ o bien del tipo $[k, +\infty)$.

3. ¿Cuál es la imagen de $f(x) = \dfrac{1}{x}$?

4. Encuentren el dominio y la imagen de las siguientes funciones. Interpreten gráficamente.

   a. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

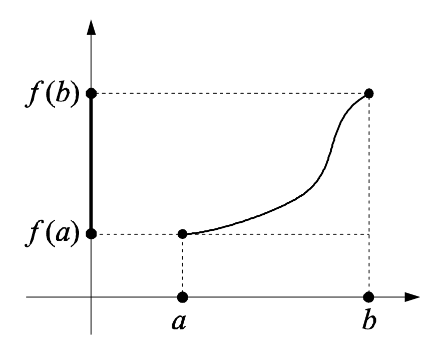
   b. $f(x) = x^3$

   c. $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x}$

   d. $f(x) = 2x + \dfrac{1}{x}$

5. Muestren que la imagen de la función $f(x) = 2x^2 + \dfrac{1}{x}$ es toda la recta. No traten de resolver ninguna ecuación; en cambio usen el teorema del valor intermedio después de determinar los límites $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ y $\lim_{x\to -\infty} f(x)$.

La inversa de una función continua y monótona



Como la función continua $f(x)$ es creciente, la imagen del intervalo $[a, b]$ es el intervalo $[f(a), f(b)]$.

Supongamos ahora que $f(x)$ es una función **continua y creciente** definida en un intervalo $I = [a, b]$. Al ser f continua el teorema del valor intermedio nos asegura que $\text{Im}(f) = [f(a), f(b)] = K$.

De manera que, para cada y en el intervalo K existe un x en el intervalo I tal que $f(x) = y$. Además, el hecho de que f sea creciente nos dice que ese x es el único que por f se aplica en y.

Ahora bien, si a cada y en K le asociamos el único x que se aplica en él, obtendremos una nueva función cuyo dominio es el intervalo K y cuya imagen es el intervalo I. A esa función la llamaremos **función inversa** de f, y la denotaremos f^{-1}. Por la manera que hemos definido a f^{-1} tenemos las siguientes propiedades:

- Para cualquier $x \in [a, b]$ se tiene que $f^{-1}(f(x)) = x$
- Para cualquier $y \in [f(a), f(b)]$ se tiene que $f(f^{-1}(y)) = y$

Todo lo que hemos dicho para una función **continua y creciente** vale para una función f **continua y decreciente** teniendo en cuenta que en ese caso la imagen de f será el intervalo $[f(b), f(a)]$.

Para ahorrar palabras diremos que una función es **monótona** en un intervalo I si es creciente en I o es decreciente en I.

El haber considerado en la discusión anterior una función con dominio en un intervalo cerrado tuvo por finalidad poder identificar claramente a la imagen de la función. Si nuestra función es continua y monótona en un intervalo I cualquiera (abierto o semiabierto; finito o infinito) la imagen $f(I)$ es también un intervalo pero no necesariamente del mismo tipo que I.

EJERCICIOS

1. ¿Cuáles de las funciones del ejercicio anterior son monótonas y continuas en su dominio?
2. Para esas funciones comprueben que la imagen es un intervalo.

La aclaración anterior nos permite enunciar el siguiente resultado para un intervalo I general:

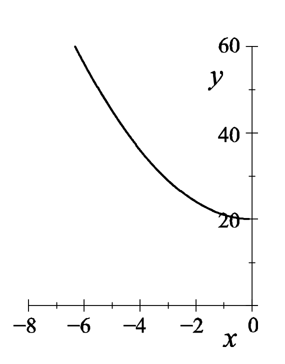
Teorema

Sea $f : I \to f(I)$ una función continua y monótona. Existe una función que llamamos **función inversa** de f y que denotamos f^{-1}cuyo dominio es $f(I)$ y cuya imagen es I que verifica:

f^{-1} es continua en $f(I)$. Para cualquier $x \in I$ se tiene que $f^{-1}(f(x)) = x$. Y además, para cualquier $y \in f(I)$ se tiene que $f(f^{-1}(y)) = y$.

.

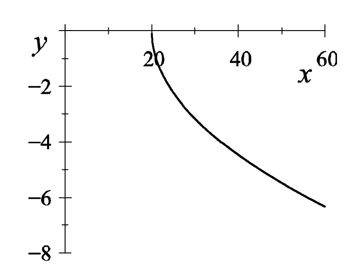
EJEMPLO



La restricción de f al intervalo I.

Consideremos la función del ejemplo anterior $f(x) = x^2+20$. Estudiando el signo de la derivada $f'(x) = 2x$ comprobamos que la función es decreciente en $I = (-\infty, 0]$ y creciente en $J = [0, +\infty)$. Por lo tanto, no es posible en principio usar lo anterior para asegurar la existencia de una función inversa en todo el dominio de f. Pero si consideramos la **restricción** de f al intervalo I, lo que no es otra cosa que mirar a la misma función $f(x) = x^2 + 20$ pero con dominio en el intervalo I. Esa restricción, que denotaremos f_I sí admitirá una función inversa f_I^{-1}.

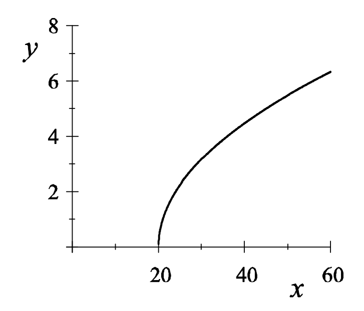
De la misma manera, la restricción de f al intervalo K que denotaremos f_K que es creciente, también admitirá una función inversa f_K^{-1}. Determinemos los dominios e imágenes de las funciones inversas.



La gráfica de f_I^{-1}

1. El dominio de f_I^{-1} es la imagen por f del intervalo I o sea $[20, +\infty)$. De modo que $f_I^{-1} : f(I) = [20, +\infty) \longrightarrow I = (-\infty, 0]$. No siempre es posible determinar la expresión de la función inversa, pero en este caso si $f_I^{-1}(y) = x$ entonces $y = f(x)$ con x perteneciente al intervalo $I = (-\infty, 0]$. Esto es:
$$\begin{aligned} y &= x^2 + 20 \\ x^2 &= y - 20 \quad \text{con } x \text{ en } I = (-\infty, 0] \\ x &= -\sqrt{y-20} \end{aligned}$$
En consecuencia, $f_I^{-1}(y) = -\sqrt{y-20}$, o si queremos usar como variable independiente a x será $f_I^{-1}(x) = -\sqrt{x-20}$

2. De la misma forma podemos trabajar con f_K^{-1}. Su dominio es $[20, +\infty)$ mientras que su imagen es el intervalo $K = [0, +\infty)$. Un cálculo similar al anterior nos da la expresión de f_K^{-1}:
$$f_K^{-1}(x) = \sqrt{x-20}$$



La gráfica de f_K^{-1}

Propiedades de la función inversa

En lo que sigue sea $f : I \longrightarrow J$ una función continua y monótona, donde $J = f(I)$. Por lo tanto existe una función inversa $f^{-1} : J \longrightarrow I$.

La gráfica de la inversa.

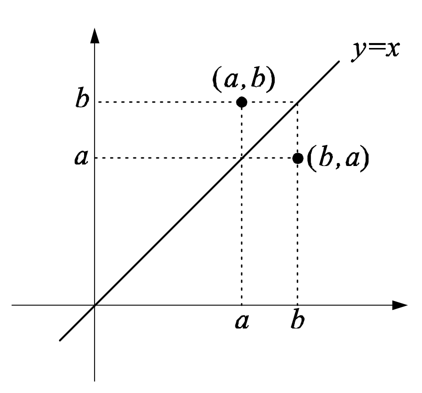


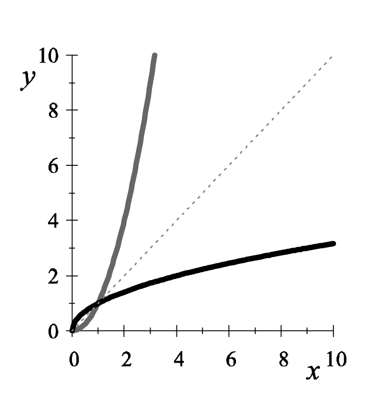
Figura 1

Para que un punto (x, y) esté en la gráfica de f^{-1} debe ser $y = f^{-1}(x)$. Pero entonces $f(y) = x$ lo cual nos dice que el punto (y, x) está en la gráfica de f.

Usen la Figura 1 para mostrar que un punto de coordenadas (a, b) es el simétrico del punto de coordenadas (b, a) respecto de la recta $y = x$.

De lo anterior podemos concluir que las gráficas de f y f^{-1} son simétricas respecto

de esa recta, como se ve en el dibujo del margen.



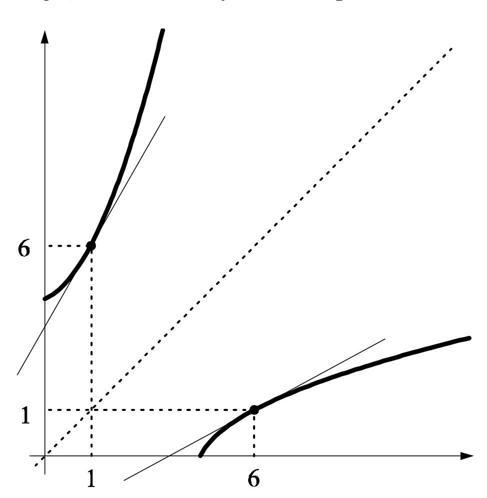
Las gráficas de una función y su inversa son simétricas respecto a la recta $y = x$.

La derivada de la función inversa.

ACTIVIDAD

Supongamos ahora que f es derivable en $x = a$, y sea $b = f(a)$.

1. Escriban la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f por el punto (a, b) .
2. Si en la ecuación anterior intercambiamos las variables queda la siguiente ecuación: $x - b = f'(a) \cdot (y - a)$ que es una recta, simétrica de la anterior respecto a la recta $y = x$ ¿Cuál es la pendiente de esa recta?
3. Comprueben gráficamente que si la recta l_1 es tangente a la gráfica de f por el punto (a, b) entonces la recta simétrica de l_1 respecto a $y = x$ es tangente a la gráfica de f^{-1} por el punto (b, a) .
4. Por ejemplo, en el dibujo siguiente están los siguientes elementos: la gráfica de $f(x) = x^2 + 5$ restringida a la semirrecta positiva; la tangente a esa gráfica por el punto $(1, 6)$; la gráfica de $f^{-1}(x) = \sqrt{x - 5}$ y la tangente a esa gráfica por el punto $(6, 1)$. También está dibujada la recta $y = x$. Encuentren las ecuaciones de ambas tangentes. ¿Qué relación hay entre las pendientes?



5. De los puntos anteriores podemos concluir que cuando $f'(a) \neq 0$ la recta simétrica a la tangente no es vertical, y su pendiente es igual a $\dfrac{1}{f'(a)}$. Lo cual nos dice que si $b = f(a)$ entonces la derivada de f^{-1} en b es igual a $\dfrac{1}{f'(a)}$.
6. Comprobemos lo anterior "algebraicamente". Supongamos que $y = f(x)$. Tenemos la identidad
$$f^{-1}(y) = x$$
si la derivamos usando la regla de la cadena se obtiene:
$$\begin{aligned} \left[f^{-1}\right]'(y) \cdot y' &= 1 \\ \left[f^{-1}\right]'(y) &= \frac{1}{y'} \end{aligned}$$

y si ponemos todo en términos de x:

$$\left[f^{-1}\right]'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \text{ siempre que } f'(x) \neq 0$$

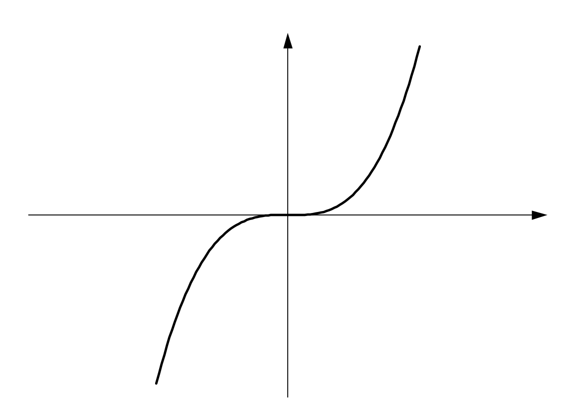
Resumen

Resumimos lo visto hasta ahora sobre funciones inversas. Supongamos que $f : I \longrightarrow f(I)$ es una función continua y monótona. Entonces:

- Existe una función inversa $f^{-1} : f(I) \longrightarrow I$ que es continua
- Para cualquier $x \in I$ se tiene que $f^{-1}(f(x)) = x$
- Para cualquier $y \in f(I)$ se tiene que $f(f^{-1}(y)) = y$
- La gráfica de f^{-1} es la simétrica de la gráfica de f respecto de la recta $y = x$
- Si $f(a) = b$ y existe $f'(a)$ y es diferente de 0 entonces f^{-1} es derivable en b y se tiene $\left[f^{-1}\right]'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$

EJERCICIOS

1. La siguiente es la gráfica de una función continua y creciente $f(x)$. A partir de la misma grafiquen a $f^{-1}(x)$



2. Muestren que las siguientes funciones tienen inversa. Encuentren el dominio y la imagen de esas inversas y determinen su expresión. En todos los casos comprueben que $f(f^{-1}(x)) = x$ y que $f^{-1}(f(x)) = x$.
   a. $f(x) = 1 - 3x$
   b. $f(x) = 5 - 3x^3$
   c. $f(x) = 1 - 2/x^2$ para $x > 0$
3. Consideren la función $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.
   a. Muestren que tiene una inversa cuya imagen es el intervalo $[1, +\infty)$.
   b. ¿Cuál es el dominio de esa inversa?

c. Encuentren $\left[f^{-1}\right]'(3)$

d. Determinen la expresión de la inversa y comprueben el resultado del punto c. derivando y evaluando esa expresión.

e. Grafiquen la función y su inversa.

4. Consideren la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + 7$.

a. Determinen en qué intervalos admite una función inversa.

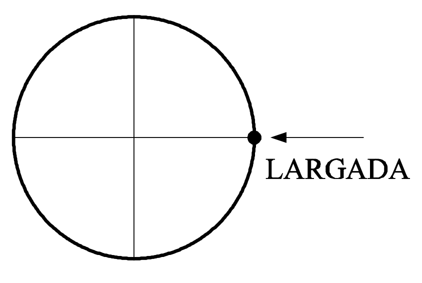
b. Encuentren dominio e imagen de las inversas y sus expresiones. Grafiquen.

Capítulo 5

Funciones trascendentes

5.1 Funciones circulares

ACTIVIDAD



El radio de la pista circular es de 30 metros.

En una pista de atletismo de forma circular la largada de las competencias se realiza desde un lugar fijo, situado frente a la tribuna principal. La pista tiene 30 metros de radio, y el centro de la circunferencia está señalado por una marca. Se quiere realizar una carrera de 1000 metros.

1. ¿Qué distancia se recorre en una vuelta?
2. Al llegar a la meta, ¿cuántas vueltas a la pista habrá dado un atleta?
3. Ubique en el dibujo aproximadamente el punto de llegada.
4. Si solamente pueden determinarse distancias en línea recta ¿cómo puede hacerse para ubicar con exactitud el punto de llegada?



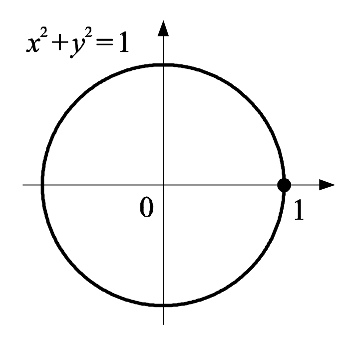
En la actividad anterior hemos comenzado con un número real (1000) al cual le hemos asociado un punto sobre la circunferencia de radio 30 y con un sistema de ejes conveniente encontramos las coordenadas del punto. Para hacerlo, hemos asociado al número con un recorrido sobre la circunferencia y recurrimos a la trigonometría para calcular las coordenadas.

En lo que sigue, daremos una visión de las funciones trigonométricas un tanto diferente a la que ustedes han conocido, en la cual las funciones se definían sobre ángulos. Nuestro propósito será definir las funciones seno, coseno y tangente como funciones numéricas, y estudiar algunas de sus propiedades con los métodos desarrollados en las capítulos anteriores. Esta manera de ver a las funciones trigonométricas será de gran importancia en las materias que siguen, tanto de Matemática como de Física. Un ejemplo de esto es la descripción del movimiento circular, que estudiaremos un poco más adelante.

El camino que seguiremos es similar al de la actividad anterior.

.

La circunferencia unitaria



La circunferencia unitaria

El conjunto de puntos del plano situados a distancia 1 del origen es una circunferencia de radio 1, centrada en el origen. Hemos aprendido que la ecuación de esta circunferencia es $x^2 + y^2 = 1$.

.

EJEMPLO

El punto $P(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})$ está sobre la circunferencia unitaria, puesto que

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{3}{9} + \frac{2}{3} = \frac{3+6}{9} = 1$$

EJERCICIOS

1. Los ejes coordenados dividen al plano en cuatro cuadrantes. Por ejemplo, el primero puede describirse como el conjunto $C1 = \{(x, y) / 0 \leq x \text{ y } 0 \leq y\}$. Describan a los cuadrantes restantes de la misma manera.
2. El punto $(\frac{1}{2}, y)$ está en la circunferencia unitaria. Sabiendo que está en el cuarto cuadrante, encuentre su segunda coordenada.

Puntos terminales en la circunferencia unitaria.

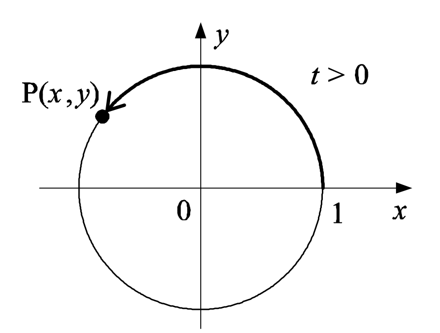


Figura 1
Un $t > 0$ determina un punto terminal $P(x, y)$ sobre la circunferencia unitaria

Supongan que t es un número real positivo. Marquemos una distancia igual a t a lo largo de la circunferencia unitaria de la siguiente manera: empezamos en el punto $(1, 0)$ y nos movemos t unidades sobre la circunferencia en el sentido opuesto al de las agujas del reloj. De esta manera llegamos a un punto $P(x, y)$ (ver Figura 1).

Para t negativo, comenzando en el mismo punto recorremos $|t|$ unidades sobre la circunferencia, pero en sentido contrario al anterior (ver Figura 2).

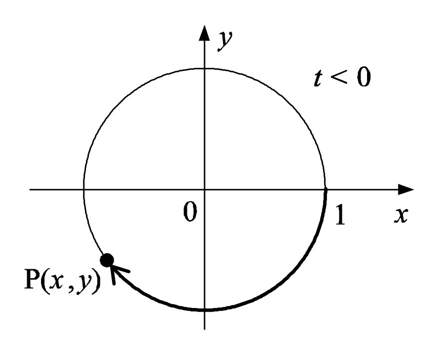
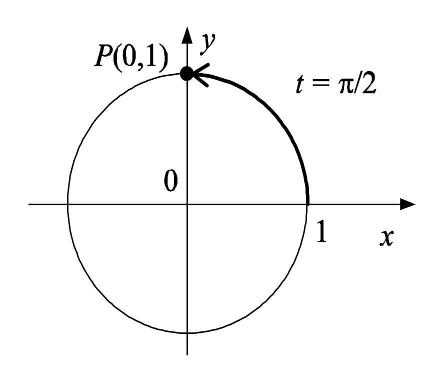
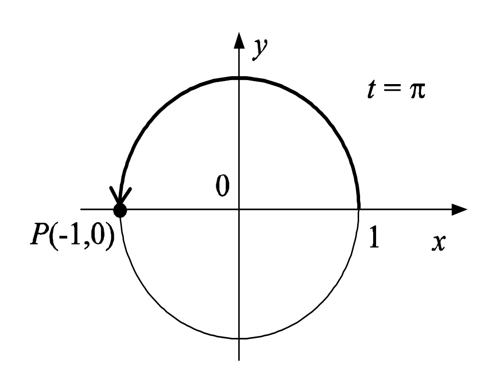


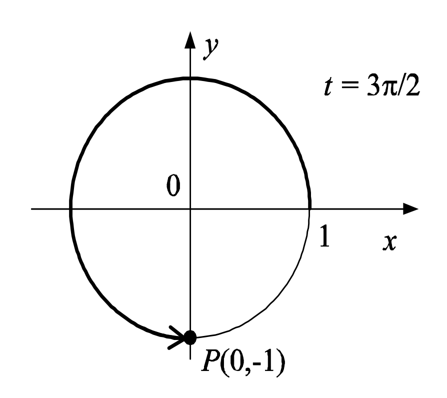
Figura 2
El punto terminal $P(x, y)$ determinado por un $t < 0$

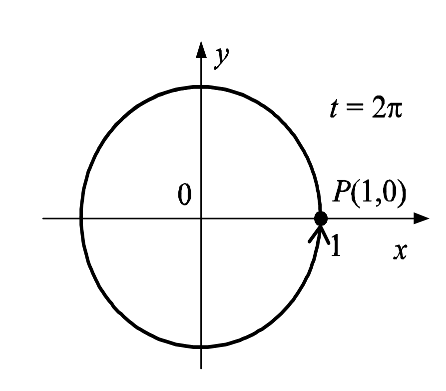
De esta manera, para cualquier número real t obtenemos un punto $P(x, y)$ sobre la circunferencia unitaria. El punto $P(x, y)$ así obtenido se llama **punto terminal** determinado por el número real t.

La longitud de la circunferencia unitaria es $C = 2\pi.1 = 2\pi$. Entonces si un punto empieza su recorrido en $(1, 0)$ y se mueve una distancia igual a 2π en sentido antihorario, llegará nuevamente a $(1, 0)$. Si recorre una distancia igual a $\frac{1}{2}.2\pi = \pi$ el punto terminal será en este caso el $(-1, 0)$. De la misma forma el punto terminal para $\frac{\pi}{2}$ (que es la cuarta parte de la longitud total de la circunferencia) será el $(0, 1)$.







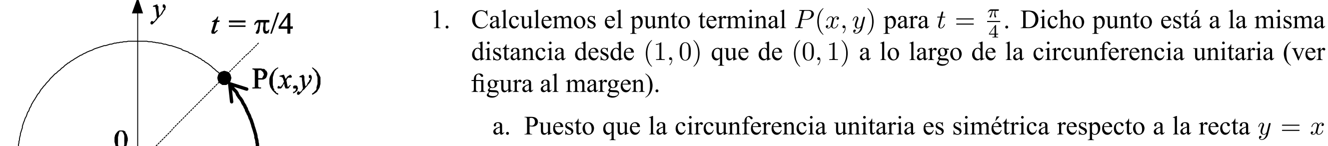


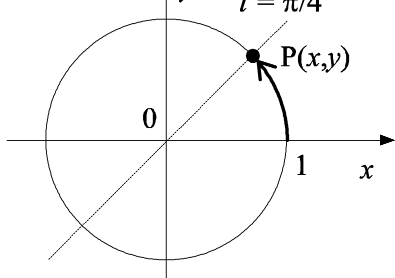
EJERCICIOS

1. Obtengan el punto terminal en la circunferencia unitaria determinado por cada uno de los siguientes números:
   a. $t = 3\pi$
   b. $t = -\pi$
   c. $t = -\frac{\pi}{2}$
2. Respondan: ¿pueden distintos valores de t determinar el mismo punto terminal? Si su respuesta es afirmativa, citen al menos dos ejemplos.

Puntos terminales de números reales particulares.

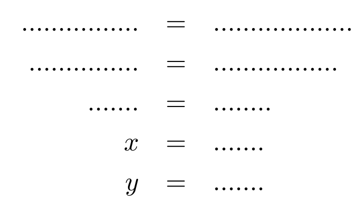
ACTIVIDAD





1. Calculemos el punto terminal $P(x, y)$ para $t = \frac{\pi}{4}$. Dicho punto está a la misma distancia desde $(1, 0)$ que de $(0, 1)$ a lo largo de la circunferencia unitaria (ver figura al margen).
   a. Puesto que la circunferencia unitaria es simétrica respecto a la recta $y = x$ (¿por qué?), deducimos que $P(x, y)$ está en la recta $y = x$. P será el punto de intersección entre la circunferencia de ecuación................................y la recta de ecuación......................., en el primer cuadrante.

b. Determinen las coordenadas (x, y) resolviendo las ecuaciones de la recta y la circunferencia conjuntamente siguiendo el esquema siguiente:



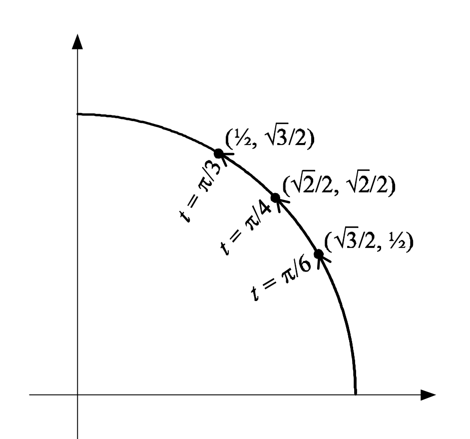
c. Por lo tanto el punto terminal determinado por $t = \frac{\pi}{4}$ es $P(....,....)$.

2. Para obtener los puntos terminales determinados por $t = \pi/6$ y $t = \pi/3$ pueden utilizarse métodos similares.

   a. Completen la siguiente tabla:

t	Punto terminal determinado por t
0	$(....,....)$
$\frac{\pi}{6}$	$(....,....)$
$\frac{\pi}{4}$	$(....,....)$
$\frac{\pi}{3}$	$(....,....)$
$\frac{\pi}{2}$	$(....,....)$

   b. Comprueben los resultados del inciso anterior comparando con la figura del margen.



Puntos terminales para valores notables de t

EJERCICIOS

Obtengan el punto terminal determinado por los siguientes valores de t.

1. $t = -\pi/4$
2. $t = \frac{3}{4}\pi$
3. $t = -\frac{7}{6}\pi$
4. $t = \frac{5}{6}\pi$

Sugerencia: Observar simetrías en una circunferencia unitaria, y tener en cuenta los signos de las coordenadas de los puntos en cada cuadrante.

Definición de las funciones circulares

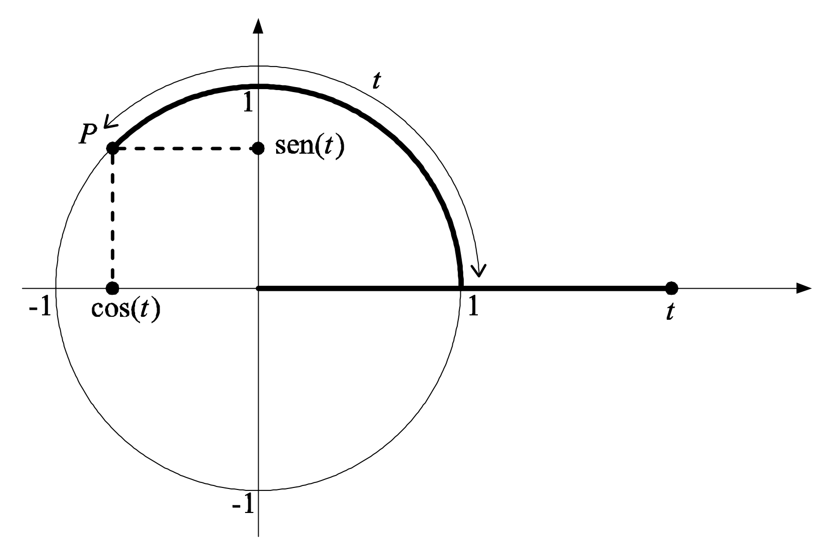
Definición

Dado un número real t y su punto terminal $P(x, y)$ sobre la circunferencia unitaria. A

partir de las coordenadas de P definimos las funciones:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} t &= y \\ \cos t &= x \\ \tan t &= \frac{y}{x} = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} \end{aligned}$$

Dado que estas funciones "trigonométricas" pueden definirse en términos de la circunferencia unitaria, las llamaremos **funciones circulares**.



En la figura se señalan los valores de $\operatorname{sen} t$ y $\cos t$ para un arco t dado.

ACTIVIDAD

Completen la tabla siguiente (la segunda fila está completada a modo de ejemplo):

t	$\operatorname{sen} t$	$\cos t$	$\tan t$
0			
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$			
$\frac{\pi}{3}$			
$\frac{\pi}{2}$			

EJERCICIOS

1. Determinen los valores de las funciones circulares de cada uno de los siguientes valores de t:
   a. $t = \frac{7\pi}{3}$
   b. $t = -\frac{5\pi}{2}$
2. Vemos que, mientras las funciones seno y coseno están definidas para cualquier valor de t, la función tangente requiere que la coordenada x del punto terminal

determinado por t sea diferente de 0.

a. ¿Para qué valores de t ocurre que la coordenada x del punto terminal es 0?

b. ¿Cuál es el dominio de la función tangente?

Valores de las funciones circulares

Para calcular valores de las funciones circulares, primero debemos tener en cuenta su signo, que depende del cuadrante en el cual se encuentra el punto terminal determinado por t.

Por ejemplo, si a t le corresponde un punto $P(x, y)$ en el tercer cuadrante, se tendrá (puesto que ambas coordenadas de P son negativas):

$$\begin{aligned} y &= \operatorname{sen} t < 0 \\ x &= \cos t < 0 \\ \frac{y}{x} &= \tan t > 0 \end{aligned}$$

EJERCICIOS

1. Completen el cuadro con + ó con - :

	1° cuadrante	2° cuadrante	3° cuadrante	4° cuadrante
sen t				
cos t				
tan t				

2. Determinen los valores de:

a. cos $\left(\frac{2}{3}\pi\right)$

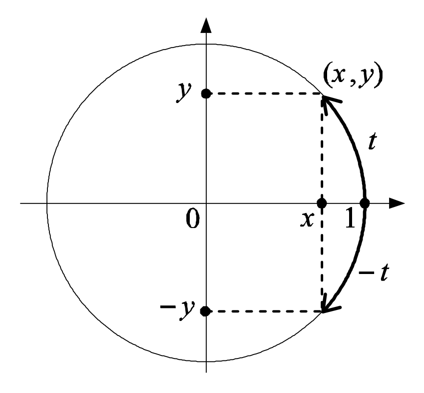
b. tan $\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

c. sen $\frac{19}{4}\pi$

Hasta ahora hemos podido hallar los valores de las funciones circulares para ciertos valores de t, pero ¿Cómo podríamos hacerlo para un t cualquiera, por ejemplo $t = 1,5$? Bueno, para eso están las calculadoras que suministran esos valores con bastante precisión (la única precaución es tener las calculadoras en modo RAD).

Cuando recurramos a la calculadora para hallar valores de las funciones circulares, usaremos la notación " $\simeq$ " que indica que el número propuesto es un aproximación del valor buscado. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(2.2) &\simeq 0.808496... \\ \cos(1.2) &\simeq 0.362\,36... \end{aligned}$$



Observación importante:

Veamos la relación entre las funciones circulares de t y de $-t$. Usando la figura vemos que:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(-t) &= -y = -\operatorname{sen} t \\ \cos(-t) &= x = \cos t \\ \tan(-t) &= \frac{-y}{x} = -\tan t \end{aligned}$$

EJERCICIOS

Usen las propiedades anteriores de las funciones circulares para determinar cada uno de los siguientes valores:

1. $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$
2. $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

La identidad fundamental

Las funciones circulares están relacionadas según la siguiente identidad fundamental (recuerde que el seno y el coseno de un número son las coordenadas de un punto sobre la circunferencia unitaria):

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$$

En la misma, dividiendo por $\cos^2 t$ se obtiene una expresión del cuadrado de la tangente en términos del cuadrado del coseno:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos^2 t} + 1 &= \frac{1}{\cos^2 t} \\ \tan^2 t &= \frac{1}{\cos^2 t} - 1 \end{aligned}$$

Estas relaciones permiten determinar unas funciones circulares en términos de otras.

EJEMPLO

Sabiendo que $\tan t = -2$ y que el punto terminal de t está en el cuarto cuadrante, determine el valor de $\operatorname{sen} t$. Dividiendo la identidad fundamental por $\operatorname{sen}^2 t$, se obtiene:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{\tan^2 t} &= \frac{1}{\operatorname{sen}^2 t} \\ \frac{\tan^2 t + 1}{\tan^2 t} &= \frac{1}{\operatorname{sen}^2 t} \\ \frac{\tan^2 t}{\tan^2 t + 1} &= \operatorname{sen}^2 t \end{aligned}$$

Si $\tan t = -2$, tendremos:

$$\begin{aligned} \text{sen}^2 t &= \frac{(-2)^2}{1+(-2)^2} = \frac{4}{5} \\ \text{sen}\, t &= \pm\sqrt{\frac{4}{5}} \end{aligned}$$

Puesto que se trata de un punto en el tercer cuadrante, el seno debe ser negativo. Por lo tanto:

$$\text{sen}\, t = -\sqrt{\frac{4}{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Gráficas de las funciones circulares

Esta sección estará dedicada al estudio de las gráficas de las funciones circulares. Las primeras en ser estudiadas serán las gráficas de las funciones seno y coseno.

ACTIVIDAD

1. ¿Qué longitud tiene la circunferencia unitaria?

2. Supongamos que el número real t determina el punto $P(x, y)$. ¿Qué punto determina el número real $t + 2\pi$?

Definición

Las funciones circulares tomarán sus valores en forma periódica

$$\begin{aligned} \text{sen}(t + 2n\pi) &= \text{sen}\, t \\ \cos(t + 2n\pi) &= \cos t \end{aligned}$$

para cualquier n entero. Por lo tanto, se dice que estas funciones son **funciones periódicas** de período 2π.

Así, las funciones seno y coseno repiten sus valores en cualquier intervalo de longitud 2π. Para trazar sus gráficas primero esbozamos la gráfica en un período ($0 \leq t \leq 2\pi$).

ACTIVIDAD

Recuerden que $\text{sen}\, t$ **es la coordenada** y **del punto terminal** $P(x, y)$

1. ¿Cómo varía la coordenada y del punto terminal conforme aumenta t?

2. ¿Cuál es el valor máximo y mínimo que toma la coordenada y?

3. Si $\text{sen}\, t$ es la coordenada y del punto terminal $P(x, y)$, ¿$\cos t$ qué representa?

4. Teniendo en cuenta sus respuestas anteriores completen la siguiente tabla:

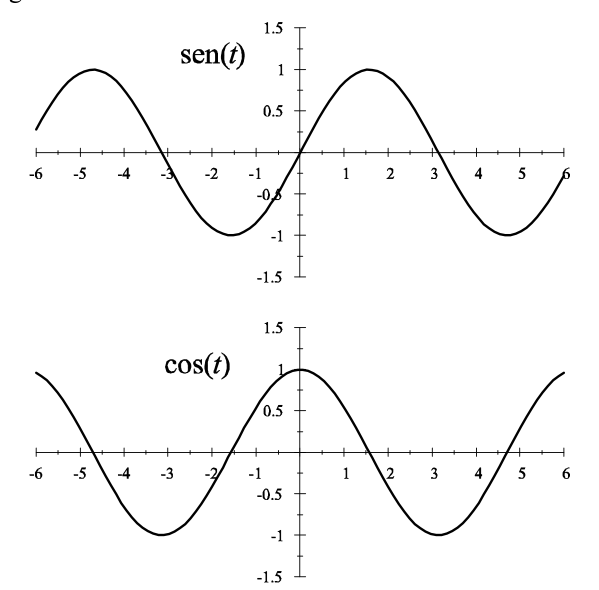
t	$\operatorname{sen} t$	$\cos t$
$\pi/2$	1	
π		-1
$3\pi/2$		
2π		1

5. Hagan un bosquejo de las gráficas de las funciones seno y coseno para $0 \leq t \leq 2\pi$.

Para trazar las gráficas con mayor precisión, en la siguiente tabla se encuentran otros valores de $\operatorname{sen} t$ y $\cos t$, y con la ayuda de una calculadora podríamos obtener aún más valores.

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$
$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Utilizando el hecho que las funciones $\operatorname{sen} t$ y $\cos t$ son periódicas con período 2π, continuamos el mismo patrón tanto a la derecha como a la izquierda para todo intervalo sucesivo de longitud 2π.



ACTIVIDAD

1. A partir de las gráficas del $\operatorname{sen} t$ y $\cos t$, grafiquen las funciones $-2\operatorname{sen} t$, $2\cos t$, $\frac{\operatorname{sen} t}{2}$, $-\frac{\cos t}{2}$

2. ¿Cuál es el valor mínimo y máximo que toman las funciones graficadas? ¿Qué

efecto produce en la gráfica la multiplicación por 2, -2, $1/2$ y $-1/2$?

3. ¿Cuáles son los ceros o raíces de estas funciones?

4. ¿En qué intervalos son positivas? ¿Y negativas? ¿Cuándo crecen y decrecen?

5. ¿Qué aspecto tendrán las gráficas de las funciones $A \operatorname{sen} t$ y $B \cos t$?

6. ¿Y las funciones $-A \operatorname{sen} t$ y $-B \cos t$?

Definición

En general para las funciones

$$\begin{aligned} y &= A \text{ sen } t \\ y &= A \cos t \end{aligned}$$

al número $|A|$ se lo llama **amplitud** y es el valor más grande que toman estas funciones.

Nos dedicamos ahora a ver qué ocurre si multiplicamos por una constante ω el **argumento** del seno y del coseno. Esto es, teniendo en cuenta que $y = A \operatorname{sen} t$ e $y = A \cos t$ tienen un período 2π las funciones

$$\begin{aligned} y &= A \operatorname{sen} \omega t \\ y &= A \cos \omega t \end{aligned}$$

¿Qué período tendrán?

Consideremos en primer lugar la función seno. Si la función $\operatorname{sen} t$ se repite cuando $t = T = 2\pi$ (T un período), la función $\operatorname{sen} \omega t$ se repetirá cuando cumpla un período $t = T'$ es decir cuando $\omega T' = 2\pi$. De manera que el período de $\operatorname{sen} \omega t$ será:

$$T' = \frac{2\pi}{\omega}$$

Observemos que $T = T'$ para $\omega = 1$.

Lo mismo vale para la función $\cos(\omega t)$, y para las funciones $A \operatorname{sen}(\omega t)$ y $A \cos(\omega t)$

EJEMPLO

¿Cuánto debe valer ω para que la función $\operatorname{sen} \omega t$ tenga período 365?

De acuerdo a lo que vimos, debe cumplirse que

$$T' = \frac{2\pi}{\omega}$$

Queremos que $T' = 365$. Por lo tanto:

$$365 = \frac{2\pi}{\omega}$$

.

O sea:

$$\omega = \frac{2\pi}{365}$$

y nuestra función de período 365 resulta:

$$\operatorname{sen} \frac{2\pi}{365} t$$

EJERCICIOS

1. Determinen la amplitud y el período de las siguientes funciones

$$\begin{aligned} y &= 4\cos 3x \\ y &= -2\operatorname{sen}\frac{x}{2} \end{aligned}$$

2. Dadas las funciones $\operatorname{sen} x$, $\operatorname{sen}(x - \pi/3)$ y $\operatorname{sen}(x + \pi/3)$

   a. ¿Cuáles son los ceros o raíces de estas funciones?

   b. ¿En qué intervalos son positivas?

   c. ¿Cuándo son crecientes y decrecientes?

   d. A partir de la gráfica del $\operatorname{sen} x$ utilizando lo que conoce de traslación de curvas, grafiquen $\operatorname{sen}(x-\pi/3)$ y $\operatorname{sen}(x+\pi/3)$. Comparen su resultado con lo calculado en los puntos anteriores.

La función tangente

Hemos definido a la función **tangente,** para $x \in \mathbb{R}$**:**

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \qquad \text{si } \cos x \neq 0$$

ACTIVIDAD

1. ¿Cuál es el dominio de $f(x) = \tan x$?

2. ¿Cuáles son los ceros de la función?

3. Con los datos encontrados bosquejen un dibujo de la función en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

4. ¿Es una función periódica? En caso afirmativo bosquejen el dibujo de la función para todo su dominio.

Las derivadas de las funciones circulares

Admitiremos que las funciones circulares son continuas en todo su dominio. Para el seno y el coseno, el dominio es toda la recta; mientras que para la tangente es necesario

excluir los valores donde se anula el coseno (hemos visto que esos valores son todos los x de la forma $\frac{\pi}{2} + k\pi$ donde k es un número entero cualquiera).

EJERCICIOS

1. Muestren que las discontinuidades de la función tangente son inevitables estudiando los límites $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+k\pi} \tan x = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+k\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ para k entero.

2. Muestren que la tangente tiene asíntotas verticales en $-\pi/2$ y $\pi/2$ y estudien el comportamiento asintótico. Generalicen a todos los x de la forma $\frac{\pi}{2} + k\pi$ con k entero.

3. Comprueben lo anterior graficando con Maple a la función $\tan(x)$ (usen la opción discont=true).

.

ACTIVIDAD

Un límite importante

Tenemos el propósito de estudiar el siguiente límite:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t}$$

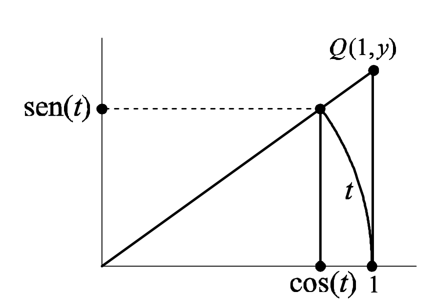
Respondan:

1. ¿Puede el límite anterior calcularse por evaluación directa?¿Por qué?

2. Notando que $\frac{\operatorname{sen} t}{t} = \frac{\operatorname{sen}(-t)}{-t}$, discutan la validez de la siguiente afirmación:
$$\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} t}{t}$$

3. El cociente $\frac{\operatorname{sen} t}{t}$ compara el seno del arco t con la longitud de ese arco. Para valores pequeños de la longitud del arco, ¿cómo le parece que es el cociente? Intente obtener una respuesta gráfica y numéricamente.

   Consideremos ahora un arco de longitud t que pensamos pequeña. Miremos el dibujo al margen.



4. Mirando los dos triángulos rectángulos apoyados sobre el eje de las abscisas (que son semejantes) muestren que la segunda coordenada del punto Q es $y = \tan t$.

5. Comprueben (comparando las áreas de los dos triángulos rectángulos y la del sector circular determinado por el arco t en el dibujo) que vale la desigualdad
$$\operatorname{sen} t . \cos t < t < \tan t$$

6. Como t es un número positivo y pequeño tenemos que $\operatorname{sen} t > 0$, y por lo tanto

la desigualdad anterior puede dividirse por $\operatorname{sen} t$, obteniendo:

.... < .... < ....

7. ¿Cuál es el límite cuando $t \to 0$ del término de la izquierda en la desigualdad anterior? ¿Y el límite cuando $t \to 0$ del término de la derecha?

8. En vista de lo anterior ¿Cuánto vale $\lim_{x\to 0} \frac{t}{\operatorname{sen} t}$?

9. ¿Qué propiedades de los límites aseguran, usando el punto anterior que $\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t}$ =1?

Como conclusión de la Actividad anterior, enunciamos el Teorema siguiente:

Teorema

$$\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$$

EJERCICIOS

Determinen los siguientes límites (pueden usar, si corresponde, que las funciones circulares son continuas en sus dominios y que $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ =1).

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{5x}$

2. $\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3t}{t}$

3. $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{4x}$

4. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{4x}$

5. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 8x}{9x}$

6. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}$

La derivada de la funciones seno y coseno

Estamos ahora en condiciones de determinar las derivadas de las funciones seno y coseno. Concretamente, se tiene el siguiente Teorema:

Teorema

$$\begin{aligned}[\operatorname{sen} x]' &= \cos x \\ [\cos x]' &= -\operatorname{sen} x\end{aligned}$$

Demostración.

Ya sabemos que la derivada de una función es el límite del cociente incremental cuando el incremento tiende a 0. Construyamos el cociente incremental de la función seno en un valor x y con un incremento h.

$$\frac{\operatorname{sen}\,(x+h)-\operatorname{sen}\,x}{h}$$

si usamos la fórmula (conocida para ángulos, y válida también para números) del seno de una suma:

$$\operatorname{sen}\,(x+h)=\operatorname{sen}\,x\cdot\cos\,h+\operatorname{sen}\,h\cdot\cos x$$

y lo reemplazamos en el cociente incremental:

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{sen}\,(x+h)-\operatorname{sen}\,x}{h} &= \frac{\operatorname{sen}\,x\cdot\cos\,h+\operatorname{sen}\,h\cdot\cos x-\operatorname{sen}\,x}{h} = \\ &= \frac{(\cos\,h-1)}{h}\operatorname{sen}\,x+\frac{\operatorname{sen}\,h}{h}\cos x\end{aligned}$$

en la expresión anterior, el segundo sumando tiende a $\cos x$ cuando $h\to\dot{0}$. En el primer sumando, necesitamos calcular

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos\,h-1}{h}$$

que es - en principio- indeterminado. Si multiplicamos por $(\cos\,h+1)$ en el numerador y el denominador obtenemos:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{(\cos\,h-1)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(\cos\,h-1)(\cos\,h+1)}{h(\cos\,h+1)} = \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos^2 h-1}{h(\cos\,h+1)} = \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-\operatorname{sen}^2 h}{h(\cos\,h+1)} = \\ &= \lim_{h\to 0}\underbrace{\frac{\operatorname{sen}\,h}{h}}_{\text{tiende a 1}}\cdot\underbrace{\frac{\overbrace{-\operatorname{sen}\,h}^{\text{tiende a 0}}}{(\cos\,h+1)}}_{\text{tiende a 2}} = 0\end{aligned}$$

En consecuencia:

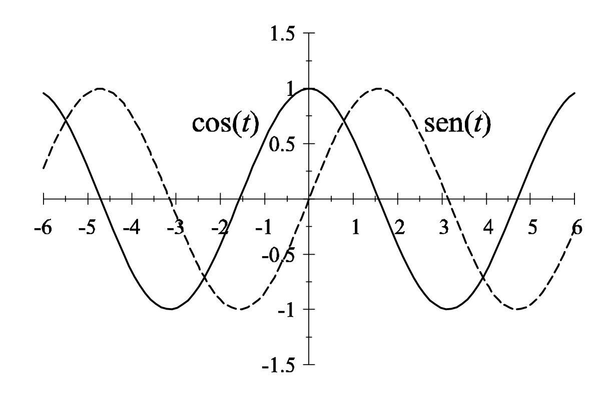
$$\begin{aligned}[\operatorname{sen} x]' &= \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}\,(x+h)-\operatorname{sen}\,x}{h} = \\ &= \operatorname{sen} x\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{(\cos\,h-1)}{h}}_{\text{tiende a 0}}+\cos x\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}\,h}{h}}_{\text{tiende a 1}} = \cos x\end{aligned}$$

Hemos demostrado que la derivada de la función $\operatorname{sen} x$ es la función $\cos x$.

Para la derivada del coseno, la identidad:

$$\begin{aligned} \cos x &= \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - x) \\ \operatorname{sen} x &= \cos(\frac{\pi}{2} - x) \end{aligned}$$

puede comprobarse fácilmente a partir de observar las gráficas conjuntas de ambas funciones:



derivando obtendremos:

$$[\cos x]' = \left[\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - x)\right]' = \cos(\frac{\pi}{2} - x) \cdot (-1) = -\operatorname{sen} x$$

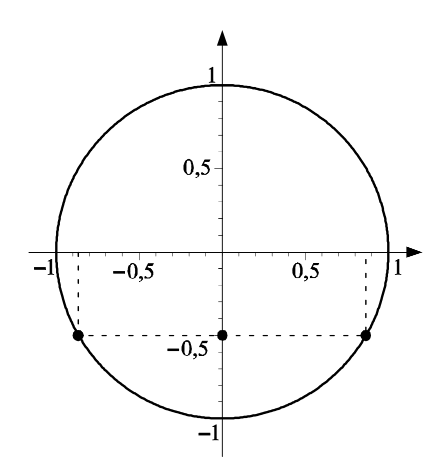
EJERCICIOS

1. Usando las derivadas del seno y el coseno y la regla del cociente muestren que:
$$[\tan x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$$
2. Calculen las derivadas de las funciones siguientes:
   a. $y = \tan 3x$
   b. $y = 3 \tan x$
   c. $y = \tan^3 x$
   d. $y = \tan x^3$
   e. $y = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x))$
   f. $y = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$
   g. $f(u) = \operatorname{sen}(u \cos u)$
   h. $h(t) = \tan^2(t^3)$
   i. $y = \sqrt{\cos(\operatorname{sen}^2(x))}$

Las funciones circulares inversas

En esta sección trataremos el tema de en qué condiciones las funciones circulares admiten una función inversa. Comencemos con la función $\operatorname{sen} t$. En primer lugar, y como consecuencia de la definición misma, tenemos que:

$$\text{Imagen}(\operatorname{sen} t) = [-1, 1]$$



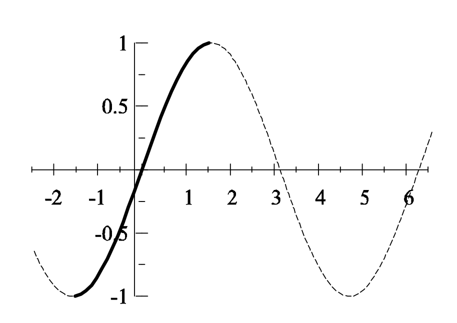
La cuestión de la función inversa se puede plantear entonces a partir de la siguiente pregunta. Dado un y en el intervalo $[-1, 1]$ ¿existe un t tal que $\operatorname{sen} t = y$? Por ejemplo, si $y = -\frac{1}{2}$ ¿Cómo encontramos un t tal que $\operatorname{sen} t = -\frac{1}{2}$? Si pensamos en el proceso de construcción de la función seno, habría que mirar a $-\frac{1}{2}$ como la segunda coordenada de un punto P sobre circunferencia unitaria. Esto es, si $P(x, -\frac{1}{2})$ debe ser:

$$x^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

de donde:

$$x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

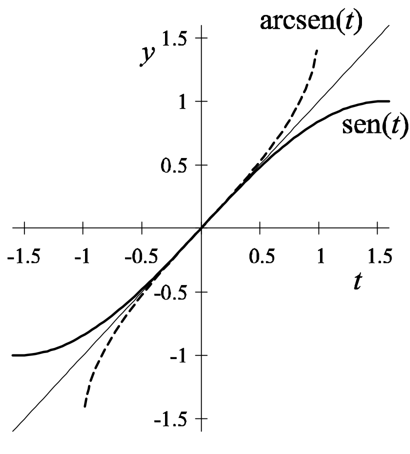
como se ve claramente en el gráfico al margen.



La función $\operatorname{sen} t$ es creciente en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$

En principio entonces existirían dos arcos digamos t_1 y t_2 para los cuales se verifica $\operatorname{sen} t = -\frac{1}{2}$. Pero no debemos olvidar que el seno es una función periódica, de manera que la misma ecuación verificarán $t_1 + 2k\pi$ y $t_2 + 2k\pi$. Lo mismo ocurrirá para cualquier valor de y comprendido entre -1 y 1.

Volvamos a nuestra discusión en la página 101 sobre la existencia de inversas. La condición suficiente para que una función admita una inversa en un intervalo I es que en ese intervalo no existan puntos distintos con la misma imagen. Y para eso basta que la función sea creciente o decreciente en I. Para la función seno, entonces, necesitamos un intervalo con esa característica. Observando la gráfica al margen, vemos que $\operatorname{sen} t$ es creciente en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.



Las gráficas de $y = \operatorname{sen} t$ y de $y = \operatorname{arcsen} t$

Podemos afirmar entonces que existe una función inversa para $\operatorname{sen} t$, que llamaremos arco seno de y y denotaremos $\operatorname{arcsen}(y)$ que verifica lo siguiente:

- $\operatorname{arcsen}(y)$ está definida en el intervalo $[-1, 1]$
- $\operatorname{arcsen}(y)$ es un valor perteneciente al intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
- Para todo $y \in [-1, 1]$ se tiene $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}(y)) = y$
- Para todo $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ se tiene $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(t)) = t$

La gráfica de $\operatorname{arcsen}(y)$ es, por supuesto, la simétrica de la gráfica de $\operatorname{sen}(t)$ respecto de la recta $y = t$.

Una discusión similar permite definir a la función arco coseno. Los pasos se detallan

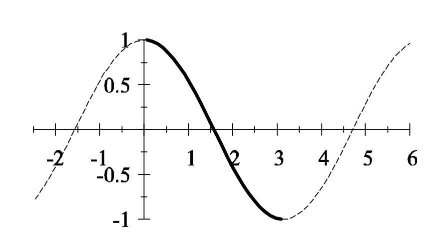
en la siguiente Actividad.

ACTIVIDAD

1. a. Observando la gráfica de la función coseno, comprueben que es decreciente en el intervalo $[0, \pi]$. Verifiquenlo derivando a la función $\cos t$ y mostrando que la derivada es negativa en ese intervalo.

   b. Se define la función arccos como la inversa del coseno en el intervalo $[0, \pi]$ ¿Cuáles son el dominio y la imagen de arccos?

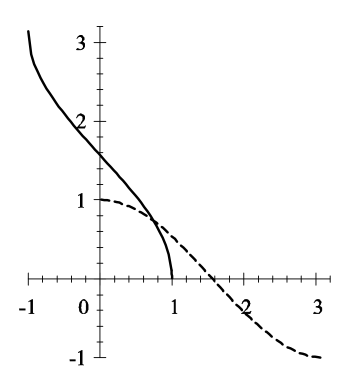




La función $\cos t$ es decreciente en $[0, \pi]$

   c. Completen:
   - Para todo $y \in$ ....se tiene $\cos(\arccos(y)) =$ .....
   - Para todo $t \in$ ....se tiene $\arccos(\cos(t)) =$ ......

   d. Identifiquen en la gráfica a las funciones $\cos(t)$ y $\arccos(t)$



2. Identifiquen un intervalo donde la función tangente sea creciente. Definan a la función arco tangente, señalen el dominio, la imagen y las identidades que verifica en forma análoga a lo que hicimos con el arcsen y el arccos. Grafiquen con Maple a la tangente y su inversa.

Las derivadas de las funciones circulares inversas

Recordemos que si $f : I \to J$ es una función inversible y derivable y $f^{-1} : J \to I$ es su inversa, se tiene:

$$\left[f^{-1}\right]'(y) = \frac{1}{f'(t)} \text{ siempre que } y = f(t) \text{ y que } f'(t) \neq 0$$

Para la función arcsen tendremos, si $y \in [-1, 1]$ y $\operatorname{sen} t = y$

$$[\operatorname{arcsen}]'(y) = \frac{1}{[\operatorname{sen}]'(t)} = \frac{1}{\cos t}$$

Esta última expresión no es del todo satisfactoria, pues nos da la derivada en y del arcsen en términos de la variable t. Pero t e y están vinculados puesto que $y = \operatorname{sen} t$. Si notamos que

$$\cos t = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t}. = \sqrt{1 - y^2}$$

entonces obtenemos la derivada de arcsen explícitamente:

$$[\text{arcsen}]'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

EJERCICIOS

1. Supongan que $\cos t = y$. Razonando como en el caso de arcsen, muestren que:
$$[\text{arccos}]'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$
2. Supongan que $\tan t = y$. Muestren que:
$$[\text{arctan}]'(y) = \frac{1}{1+y^2}$$
(sugerencia: usen la expresión del coseno en términos de la tangente).

5.2 Exponenciales y logaritmos

Funciones exponenciales

Una gran cantidad de situaciones provenientes de las ciencias naturales se modelan mediante las funciones exponenciales. Una función exponencial tiene la forma:

$$f(x) = a^x$$

donde a es un número real fijo y mayor que 0.

Aceptaremos el siguiente teorema, que asegura la existencia de las funciones exponenciales y enuncia algunas de las propiedades de las mismas:

Teorema

Dado $a > 0$ existe una función *continua y derivable* cuyo dominio es toda la recta real llamada **función exponencial de base** a, que denotamos como a^x y que tiene las siguientes propiedades:

1. $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$
2. $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$
3. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

EJERCICIOS

1. Supongan que n es un número natural. Completen:
$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n veces}}$$
$$a^{-n} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{1}{a^n} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

2. Supongan ahora que $\dfrac{p}{q}$ es un número racional ¿Cuál es el significado de $a^{\frac{p}{q}}$?

3. Consideren $a = 2$. Tenemos entonces la función exponencial de base 2:

$$f(x) = 2^x$$

   a. Completen la tabla siguiente:

x	$3/4$	0	3	0.1	1.25	-2.3	$0.\widehat{3}$	1	10
2^x por definición	$2^{3/4}$								
2^x según el exponente	$\sqrt[4]{2^3}$								
2^x aproximado por calculadora	1.68..								

   b. Ubiquen los valores anteriores en la gráfica de 2^x al margen.

La gráfica de $y = 2^x$

Estudiaremos a continuación algunas de las propiedades más importantes de las funciones exponenciales y trataremos de describir la forma de sus gráficas.

En todo lo que sigue llamaremos $f(x) = a^x$ donde a será un número fijo, mayor que 0.y distinto de 1.

Positividad

- Cualquiera sea x se tiene que $a^x > 0$.

En efecto, usando las leyes de los exponentes se tiene que $a^x \cdot a^{-x} = a^0 = 1$, y por lo tanto a^x es siempre distinto de 0. Por otro lado, $a^x = (a^{x/2})^2 \geq 0$ por ser un cuadrado.

Ecuación fundamental

Si bien por el momento no podemos dar una expresión para la derivada de la función exponencial $f(x) = a^x$ si escribimos el cociente incremental y usamos las leyes de los exponentes encontraremos una importante relación entre la función y su derivada. Veamos, el cociente incremental en un x cualquiera es:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \frac{a^h - a^0}{h} = a^x \frac{a^h - 1}{h}$$

Por lo tanto:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} a^x \frac{a^h - 1}{h} = a^x \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x f'(0)$$

Esta última igualdad nos dice que el valor de la derivada de una función exponencial es proporcional al valor de la función, siendo el coeficiente de proporcionalidad la derivada de la función en $x = 0$.

Para que no se nos olvide, enunciaremos esta propiedad:

Teorema

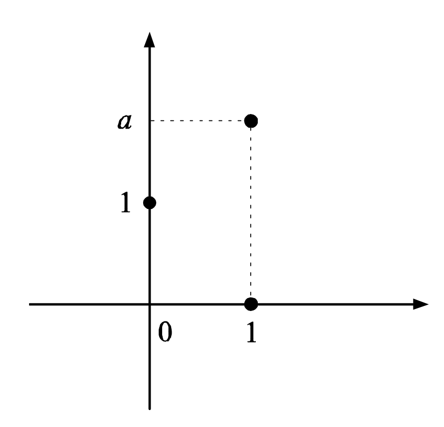
Sea $f(x) = a^x$ una función exponencial. Entonces la función satisface la siguiente

ecuación:

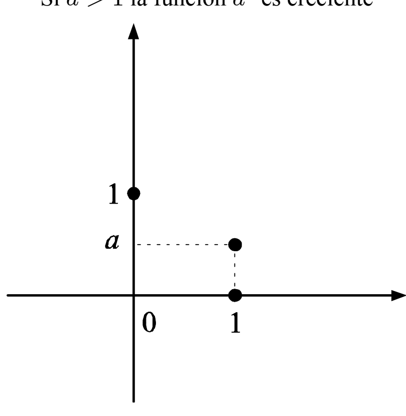
$$f'(x) = f'(0) \cdot f(x)$$

Si bien no conocemos el valor de $f'(0)$ (que dependerá de la base a y que calcularemos más adelante), la propiedad anterior nos permitirá obtener una gran cantidad de información acerca de la función y sobre la forma de sus gráficas.

Crecimiento y decrecimiento



Si $a > 1$ la función a^x es creciente



Si $a < 1$ la función a^x es decreciente



Puesto que a^x es positivo el signo de la derivada dependerá del signo de $f'(0)$. Notemos que necesariamente $f'(0) \neq 0$, pues de lo contrario se tendría $f'(x) = 0$ para todo x y $f(x)$ sería constante.

Bien, hemos establecido que la derivada de a^x es no nula, y siendo continua, conservará su signo. Por lo tanto la exponencial será o bien creciente o bien decreciente en toda la recta. Aunque desconozcamos casi todo sobre los valores de la exponencial, hay algo que siempre sabemos: su valor en 0 y su valor en 1. En efecto:

$$f(0) = a^0 = 1 \qquad\qquad f(1) = a^1 = a$$

Entonces si $a > 1$, resulta $1 = f(0) < f(1) = a$, y $f(x)$ es creciente. De la misma manera, si $a < 1$, $f(x)$ resulta decreciente. Resumiendo:

- Si $a > 1$, $f(x) = a^x$ es una función creciente (estrictamente).
- Si $a < 1$, $f(x) = a^x$ es una función decreciente (estrictamente).

Concavidad

Usando la ecuación fundamental

$$f'(x) = f'(0) \cdot f(x)$$

y derivando:

$$f''(x) = [f'(0) \cdot f(x)]' = f'(0).f'(x) = f'(0) \cdot f'(0).f(x) = (f'(0))^2 \cdot f(x)$$

Lo cual nos muestra que la derivada segunda de la exponencial es siempre positiva. Por lo tanto:

- La gráfica de una función exponencial es siempre cóncava hacia arriba.

Comportamiento en el infinito

Vamos a estudiar primero el caso $a > 1$. Vamos a probar que $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$.

Consideremos un $x > 0$ cualquiera, como la exponencial es una función derivable en toda la recta, podemos usar el teorema del valor medio en el intervalo $[0, x]$. De acuerdo con ese teorema, existirá un c perteneciente al intervalo abierto $(0, x)$ tal que:

$$\frac{a^x - a^0}{x} = \frac{a^x - 1}{x} = f'(c)$$

A su vez, la derivada de la exponencial es creciente (puesto que $f'' > 0$) y por lo tanto

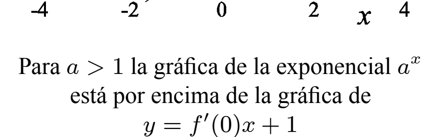
podemos afirmar que:

$$\frac{a^x - 1}{x} = f'(c) > f'(0)$$

y como $x > 0$ podemos multiplicar la desigualdad anterior por x :

$$\begin{aligned} a^x - 1 &> f'(0).x \\ a^x &> f'(0).x + 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, cuando $a > 1$ la exponencial está por encima de la función lineal de pendiente positiva $f'(0).x + 1$, que tiende a $+\infty$ cuando $x \to +\infty$.



Para $a > 1$ la gráfica de la exponencial a^x está por encima de la gráfica de $y = f'(0)x + 1$

Sigamos con $a > 1$, y veamos el comportamiento en $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} a^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{a^x} = 0$$

Veamos ahora el caso $0 < a < 1$. Usemos que si $a < 1$, entonces $a^{-1} = \dfrac{1}{a} > 1$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} a^x &= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^{-x} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^{x} = 0 \\ \lim_{x\to-\infty} a^x &= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^{x} = +\infty \end{aligned}$$

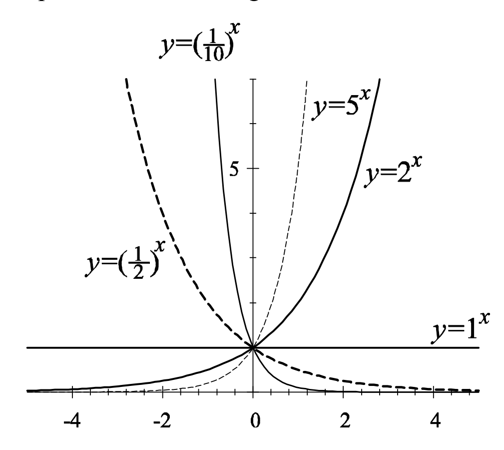
Resumiendo:

- Si $a > 1$ se tiene:
$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} a^x &= +\infty \\ \lim_{x\to-\infty} a^x &= 0 \end{aligned}$$
- Si $a < 1$ se tiene:
$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} a^x &= 0 \\ \lim_{x\to-\infty} a^x &= +\infty \end{aligned}$$

En vista de los límites anteriores podemos afirmar que la imagen de una función exponencial a^x es el conjunto de los números reales estrictamente positivos: $\{y \in \mathbf{R} / y > 0\}$ cualquiera sea la base $a > 0$.

Gráficas

Podemos describir esquemáticamente las gráficas de las funciones exponenciales



El número e

ACTIVIDAD

La ecuación fundamental nos dice que, para una función exponencial $f(x) = a^x$ la derivada es un múltiplo constante de la función. Esa constante depende únicamente de la base a. Lo expresamos así:

$$[a^x]' = k_a a^x$$

1. Sabemos que $k_a = f'(0)$. Para un a particular, podemos estimar numéricamente el valor de k_a. Por ejemplo, para $a = 2$

   $$k_2 = \lim_{h\to 0} \frac{2^h - 1}{h}$$

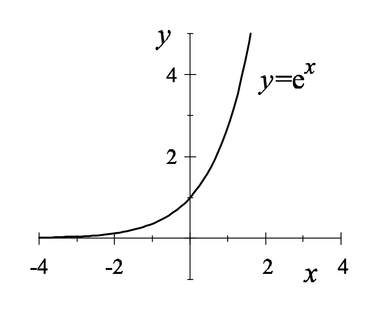
   Hagan una tabla con valores de h cada vez más pequeños y den una aproximación para k_2 con dos decimales.

2. Hagan lo mismo para $a = 3$, dando una aproximación de k_3, también con dos decimales.

3. Lo hecho en los puntos 1 y 2 nos dice:

   $$0.69 \simeq k_2 < k_3 \simeq 1.09$$

4. Considerando que ésas son las pendientes de las tangentes a las gráficas de 2^x y de 3^x por el punto $(0, 1)$ discutan la siguiente afirmación: "debe existir una base e comprendida entre 2 y 3 de manera que la pendiente de la tangente a la gráfica de e^x por el punto $(0, 1)$ sea exactamente 1". Estimen ese valor con 2 decimales correctos.



La gráfica de $y = e^x$

Aceptaremos en vista de la actividad anterior, la existencia de un número que llamaremos e para el cual se verifica:

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

Por lo tanto la función exponencial de base e tiene la siguiente propiedad fundamental:

$$[e^x]' = e^x$$

En materias posteriores se mostrará cómo se consiguen aproximaciones de e con la precisión que se quiera. Por ahora demos una aproximación de e con cinco decimales:

$$e \simeq 2.71828$$

A la función exponencial de base e se la llama simplemente "función exponencial".

EJERCICIOS

1. Den la ecuación de la recta tangente a $f(x) = e^x$ por el punto de abscisa 0.

2. Deriven:

   a. $y = 2xe^x$

b. $y = e^{x^2}$

c. $y = e^{\operatorname{sen} x}$

d. $y = \cos(e^x)$

La función logaritmo natural

ACTIVIDAD

En una experiencia de laboratorio, si se cultiva en un medio nutriente adecuado una clase de bacterias, la población de las mismas en el cultivo se triplica cada 2 horas. El cultivo se inicia con 500 células.

1. Den una expresión para la cantidad de células en el cultivo al cabo de $2n$ horas, donde n es un número natural.

2. Den una expresión de la cantidad de células en el cultivo al cabo de n horas, con n natural.

3. En general, para $t > 0$ ¿Cuál será la expresión del número de células en el cultivo? Por ejemplo cuantas células habrá 20 minutos después de haber comenzado la experiencia?

4. En determinado instante se observa el cultivo y se estima que en el mismo hay 6×10^5 células ¿Cómo harían para estimar el tiempo transcurrido desde el inicio de la experiencia?

5. En general ¿qué ecuación hay que resolver para determinar el instante en el que la cantidad de células alcanza un número dado $N > 500$? Esa ecuación ¿siempre tiene solución? Justifiquen.

Ecuaciones como la de la actividad anterior, en las que la incógnita está dentro de un exponente requieren, para ser resueltas, de una operación que permita (en algún sentido que precisaremos) "despejar" exponentes. Trabajaremos primero con la base e pero las herramientas que desarrollaremos permitirán tratar con una base cualquiera.

El problema de resolver, para un valor y dado la ecuación:

$$e^x = y$$

no es ni más ni menos que el problema de la existencia de la función inversa que hemos considerado en general en la página 101 y en particular (para las funciones circulares inversas) en la página 122.

En este caso, conviene recordar lo que sabemos de la función exponencial $f(x) = e^x$:

- El dominio de $f(x) = e^x$ es toda la recta real.
- La imagen de $f(x) = e^x$ es la semirrecta $(0, +\infty)$.

- Puesto que $e > 1$, $f(x) = e^x$ es una función creciente.

En vista de lo anterior, enunciamos el siguiente Teorema:

Teorema

La exponencial $f(x) = e^x$ admite una función inversa que llamaremos **logaritmo natural,** y denotaremos $\ln x$. La función $\ln x$ posee las siguientes propiedades:

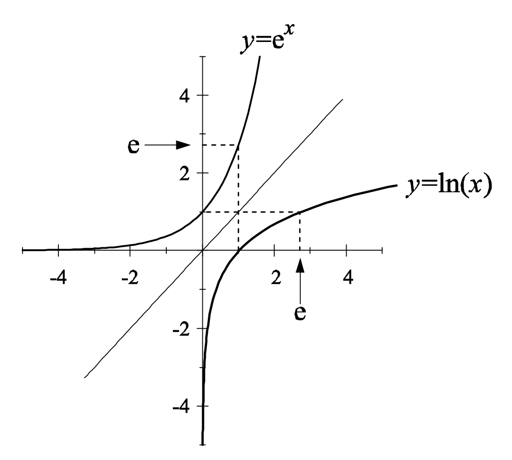
1. El dominio de $\ln x$ es la semirrecta $(0, +\infty)$.

2. La imagen de $\ln x$ es toda la recta real.

3. Cualquiera sea $y > 0$ se tiene que $\ln x = y$ si y sólo si $e^y = x$

Por ejemplo, como $e^0 = 1$ se tendrá $\ln 1 = 0$. De la misma manera, puesto que $e^1 = e$ tendremos que $\ln e = 1$.

La gráfica de $\ln x$ se obtiene reflejando la grafica de la exponencial respecto a la recta $y = x$:



EJERCICIOS

1. Simplifiquen las siguientes expresiones:
   a. $e^{\ln 7}$
   b. $e^{-\ln 0.3}$
   c. $\ln(\ln(e))$
   d. $\ln(e^{-x^2-y^2})$
   e. $e^{\ln x - \ln y}$
   f. $\ln(e^{2\ln x})$
2. Despejen y en las siguientes ecuaciones:
   a. $\ln y = 2x + 4$

b. $\ln(y-1) - \ln 2 = x + \ln x$

3. Despejen k en las siguientes ecuaciones:
   a. $e^{2k} = 4$
   b. $e^{\frac{k}{1000}} = a$
   c. $e^{3k} = \frac{1}{4}$
   d. $e^{k \cdot \ln 2} = 2$

La derivada de $\ln x$

Puesto que el logaritmo natural y la exponencial son inversas una de la otra, tendremos que para todo $x > 0$ vale la igualdad:

$$e^{\ln x} = x$$

que, bien mirada, es una igualdad entre dos funciones. Si las funciones son iguales, iguales serán sus derivadas:

$$\left[e^{\ln x}\right]' = [x]'$$

el miembro derecho es, obviamente, igual a la función constante 1. Usamos la regla de la cadena para derivar el miembro izquierdo:

$$\left[e^{\ln x}\right]' = e^{\ln x} \cdot [\ln x]' = x \cdot [\ln x]'$$

Obtenemos la siguiente igualdad:

$$x \cdot [\ln x]' = 1$$

y como $x > 0$:

$$[\ln x]' = \frac{1}{x}$$

EJERCICIOS

Deriven:

1. $y = \ln 2x$
2. $y = \ln x^2$
3. $y = (\ln x)^2$
4. $y = x \ln x$
5. $y = \ln\left(e^{2 \ln x}\right)$

Propiedades de $\ln x$

Así como la propiedad fundamental de la exponecial es transformar sumas en productos, la del logaritmo natural es la de transformar productos en sumas. Concretamente,

si x y y son números positivos se tiene que:

$$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$$

¿Cómo demostrar esta igualdad? Bueno, allí se afirma que el $\ln(x{\cdot}y)$ es cierto número. Por definición tenemos:

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y \quad \text{si y sólo si} \quad e^{\ln x + \ln y} = x \cdot y$$

Y, efectivamente:

$$e^{\ln x + \ln y} = e^{\ln x} e^{\ln y} = x \cdot y$$

Otras propiedades de tipo "algebraico" se desarrollan en el ejercicio siguiente.

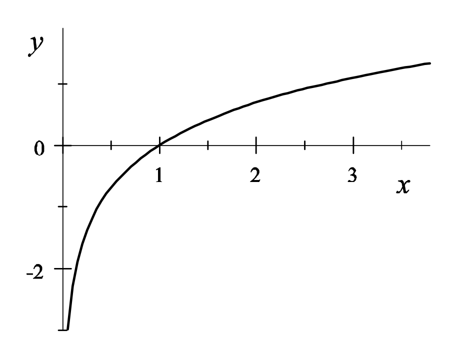
EJERCICIOS

Demuestren las siguientes propiedades de $\ln x$

1. $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln x$
2. $\ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y$
3. $\ln(a^x) = x \ln a$ para todo x y todo $a > 0$

Veamos ahora algunas propiedades funcionales del logaritmo natural:

- **Dominio:** Hemos visto que $Dom(\ln x) = \{x/x > 0\} = (0, +\infty)$
- **Continuidad y derivabilidad:** $\ln x$ es continua y derivable en todo su dominio.
- **Crecimiento:** Puesto que $[\ln x]' = \frac{1}{x} > 0$ en su dominio, resulta que $\ln x$ es una función creciente en $(0, +\infty)$
- **Concavidad:** $[\ln x]'' = \left[\frac{1}{x}\right]' = -\frac{1}{x^2} < 0$. Por lo tanto la gráfica es cóncava hacia abajo siempre.
- **Signo:** $\ln x = 0$ solamente si $x = 1$. Como es creciente tendremos $\ln x < 0$ en $(0, 1)$ y $\ln x > 0$ en $(1, +\infty)$.
- **Comportamiento en el infinito:** $\ln x$ es creciente. Además toma valores tan grandes como se quiera (si quiero, por ejemplo, que $\ln x = 10^n$ me basta tomar $x = e^{10^n}$), Podemos afirmar entonces que:
$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$
- **Comportamiento en** 0^+: Si bien $\ln x$ no está definida para $x = 0$, sí lo está a la derecha de ese valor. Podemos preguntarnos entonces cuál es el comportamiento de la función cuando nos aproximamos a 0 por la derecha, esto es: ¿Cuánto vale $\lim_{x \to 0^+} \ln x$? Para verlo llamemos $u = \frac{1}{x}$. De esta forma, cuando $x \to 0^+$ se tiene que $u \to +\infty$. Entonces:
$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = \lim_{u \to +\infty} \ln \frac{1}{u} = \lim_{u \to +\infty} -\ln u = -\infty$$
- **Gráfica:** ver al margen.



La gráfica de $y = \ln x$

La derivada de a^x

Hemos visto que cualquier función exponencial $f(x) = a^x$ tiene como derivada a un múltiplo constante de la misma función; es más, hemos determinado que:

$$[a^x]' = k_a \cdot a^x$$

donde k_a es la derivada de la exponencial en $x = 0$. Ha llegado el momento de saber cuánto vale k_a. De las propiedades del logaritmo tenemos que, cualquiera sea $a > 0$:

$$\ln(a^x) = x \ln a$$

Si en ambos miembros tomamos exponencial:

$$e^{\ln(a^x)} = e^{x \ln a}$$

y por lo tanto:

$$a^x = e^{x \ln a}$$

Si derivamos:

$$[a^x]' = e^{x \ln a} \cdot \ln a = \ln a \cdot a^x$$

El misterioso k_a resulta ser el logaritmo natural de la base a.

Por lo tanto tendremos:

$$\boxed{[a^x]' = \ln a \cdot a^x}$$

EJEMPLO

La derivada de x^x

Cuando en una función que incluye un exponente la **variable está solamente en la base**, se trata de una función potencia que se deriva así:

$$[f(x)^r]' = r f(x)^{r-1} \cdot f'(x)$$

Cuando la **variable está solamente en el exponente**, se trata de una exponencial, que se deriva así:

$$\left[a^{f(x)}\right]' = \ln a \cdot a^{f(x)} \cdot f'(x)$$

por lo que vimos en el punto anterior y la regla de la cadena.

Una situación un poco más complicada la presenta una función en la cual **la variable participa de la base y del exponente**. Por ejemplo: x^x. Para derivar estas funciones, conviene tomar logaritmos y derivar:

$$\ln(x^x) = x \cdot \ln x$$

Por un lado tenemos:

$$[\ln(x^x)]' = \frac{[x^x]'}{x^x}$$

Por el otro

$$[x \cdot \ln x]' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

Juntando ambos resultados:

$$\frac{[x^x]'}{x^x} = \ln x + 1$$

Y despejando $[x^x]'$ que es la derivada que nos interesa:

$$[x^x]' = x^x(\ln x + 1)$$

EJERCICIOS

1. Calculen la derivada de cada una de las siguientes funciones:
   a. $f(x) = x^{\sqrt{5}}$
   b. $g(u) = (\sqrt{5})^u$
   c. $y = 5^{\sqrt{x}}$
   d. $r(t) = \pi^{\cos(t)}$
   e. $y = 2^x$
2. En el ejemplo anterior en el que derivamos a x^x usamos un método que puede ser útil en general:
   a. Supongan que $f(x)$ es una función positiva y derivable. Muestre que
   $$[\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$
   y que, por lo tanto
   $$f'(x) = f(x)\,[\ln f(x)]'$$
   b. El ítem anterior indica una manera de encontrar la derivada de una función como el producto entre la función y la derivada de su logaritmo natural. Por ejemplo, úsenla para encontrar y' en el siguiente ejemplo:
   $$y = \frac{\sqrt{x^2 + x}}{\sqrt[5]{x^4 + 2x + 1}}$$
3. Usando logaritmos, encuentren las derivadas de las siguientes funciones:
   a. $y = x^{x+1}$
   b. $y = t^{\sqrt{t}}$
   c. $y = \left(\sqrt{t}\right)^t$
   d. $y = (\ln x)^x$
   e. $h(s) = \cos(s)^s$

El crecimiento de las funciones exponenciales y logarítmicas

Veremos en esta sección que las funciones exponenciales crecen muy rápido, mientras que las logarítmicas lo hacen muy lentamente. Como rápido y lento son conceptos relativos, el crecimiento de estas funciones lo compararemos con el de las funciones potencia de exponente positivo, esto es las funciones del tipo x^α con $\alpha > 0$. Se tienen los siguientes resultados:

- Cualquiera sea $\alpha > 0$ (en particular para valores grandes de α) se tiene:
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$$
esto nos dice que el crecimiento de la exponencial es más rápido que el de cualquier potencia de x.
- Cualquiera sea $\alpha > 0$ (en particular para valores pequeños de α) se tiene:
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$$
esto nos dice que el crecimiento del logaritmo es más lento que el de cualquier potencia de x.

Para una demostración de estas propiedades véase el ejercicio opcional de la página 136

EJEMPLO

1. Calculemos el límite:
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2+x-1}$$
Tenemos:
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2+x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} \cdot \underbrace{\frac{1}{(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})}}_{\text{tiende a 1}} = +\infty$$
2. Calculemos el límite
$$\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x$$
Aquí tenemos un producto donde una de las funciones tiende a 0, mientras que la otra tiende a $-\infty$. Para decidir quién gana usaremos lo que sabemos del crecimiento de $\ln x$. Como ese conocimiento lo tenemos en $+\infty$, cambiaremos la expresión anterior haciendo $u = \frac{1}{x}$. De esta forma, cuando $x \to 0^+$ se tiene que $u \to +\infty$. Así nuestro límite queda:
$$\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x = \lim_{u\to+\infty} \frac{1}{u^2} \ln \frac{1}{u} = \lim_{u\to+\infty} \frac{1}{u^2}(-\ln u) = \lim_{u\to+\infty} -\underbrace{\frac{\ln u}{u^2}}_{\text{tiende a 0}} = 0$$

EJERCICIOS

1. Calculen los límites siguientes:

a. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^2}{x}$

b. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{3x}{\ln x}$

c. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x}}{x^2}$

d. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x\ln x}$

e. $\lim_{x\to-\infty} xe^x$

2. Estudien y grafiquen a las funciones

a. $f(x) = x\ln x$

b. $g(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$

c. $h(x) = \dfrac{e^x}{x}$

3. **(Opcional)** Sea $\alpha > 0$

a. Muestren que la función $f(x) = \dfrac{e^x}{x^\alpha}$ es creciente en $(\alpha, +\infty)$

b. Muestren que la función $f(x) = \dfrac{e^x}{x^\alpha}$ es cóncava hacia arriba en $(\alpha, +\infty)$. Usen que la derivada segunda de f puede escribirse:

$$f''(x) = e^x \frac{(x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \alpha)}{x^{\alpha+2}} = e^x \frac{(x-\alpha)^2 + \alpha}{x^{\alpha+2}} > 0$$

c. Usen 1 y 2 para concluir que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \text{ para cualquier } \alpha > 0$$

d. Calculen el límite $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha}$ siguiendo los pasos:

i En la expresión $\dfrac{\ln x}{x^\alpha}$ hagan la sustitución $y = \alpha \ln x$.

ii Cuando $x \to +\infty$ ¿ adónde tiende y ?

iii De a. y b. concluyan que:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha} \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{e^y}$$

iv Usen el punto anterior y el límite del punto 3 para mostar que:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$$

Funciones hiperbólicas

Como una aplicación de las funciones exponenciales mencionaremos a las funciones hiperbólicas. Las definimos:

Definición

El **coseno hiperbólico** se denota **cosh** y se define como:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

El **seno hiperbólico** se denota **senh** y se define como:

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

EJERCICIOS

1. Muestren que la derivada de $\cosh(x)$ es $\operatorname{senh}(x)$ y que la derivada de $\operatorname{senh}(x)$ es $\cosh(x)$.

2. Hagan un estudio de las funciones senh y cosh y dibujen una gráfica de las mismas.

3. Comprueben su estudio graficando a las funciones con Maple

4. Prueben la siguiente identidad:
$$\operatorname{senh}^2(x) - \cosh^2(x) = -1$$

5. Usen 4. para mostrar que un punto de coordenadas $(\cosh(t), \operatorname{senh}(t))$ está sobre la curva de ecuación $y^2 - x^2 = -1$. Esta última curva es una hipérbola. Usen Maple para graficar esa hipérbola.

6. Muestren que $\operatorname{senh}(x)$ es una función inversible en toda la recta. A la inversa se la llama "arco seno hiperbólico" y se la denota $\operatorname{arcsenh}(x)$. Determinen la derivada de arcsenh.

7. Muestren que $\cosh(x)$ es una función inversible en el intervalo $[0, +\infty)$. A la inversa se la llama "arco coseno hiperbólico" y se la denota $\operatorname{arccosh}(x)$. Determinen la derivada de arccosh.

Capítulo 6
Funciones vectoriales

6.1 Vectores en el plano y en el espacio

En este capítulo veremos de qué manera las ideas y conceptos que hemos desarrollado hasta ahora – fundamentalmente el de la derivada como herramienta para tratar el cambio de una magnitud – pueden extenderse a una clase más amplia de funciones: **las funciones a valores vectoriales**.

Para ello, estudiaremos unos objetos nuevos llamados **vectores**, cuya importancia se debe a que permiten la descripción matemática de algunos modelos físicos fundamentales. Las fuerzas, las velocidades, las aceleraciones son algunas de las magnitudes cuya representación matemática se expresa vectorialmente de manera natural y útil.

Vectores y desplazamientos

Los vectores, o más precisamente el llamado cálculo vectorial, constituyen el lenguaje apropiado para tratar con magnitudes tales como velocidades, fuerzas, flujos y otras de gran importancia para la Física y la Ingeniería. Por lo tanto, comprender correctamente la idea de vector y desarrollar las habilidades para expresarse y operar vectorialmente es fundamental para los estudiantes de Ingeniería.

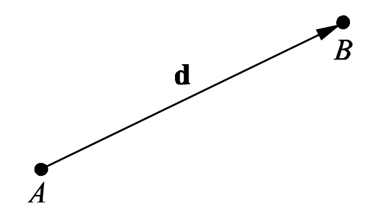
Entre las diversas nociones que pueden representarse vectorialmente, elegiremos para comenzar nuestra discusión al **desplazamiento**. El desplazamiento, ya lo hemos visto, es una idea asociada al movimiento de un objeto. Más precisamente, si un objeto se mueve en el tiempo su desplazamiento entre dos instantes dados es el **cambio de su posición** entre esos instantes.

Ahora bien, es sencillo describir un desplazamiento **sobre una recta** en la cual hemos elegido una unidad y un sentido; en ese caso, un desplazamiento está dado por un número. Por ejemplo un desplazamiento de -2 significa un movimiento de dos unidades en el sentido contrario al elegido como positivo; mientras que un desplazamiento de 5.30 significa un movimiento de 5.30 unidades en el sentido elegido como positivo. Notemos que podemos describir desplazamientos sin necesidad de establecer un origen [1].

Pasemos ahora al plano. Dos puntos en el plano, digamos A y B definen un desplazamiento $\mathbf{d}$ ¿Cómo? De la manera obvia: es el cambio en la posición de un objeto que

[1] Sin embargo, para establecer la *posición* de un objeto es necesario contar con un punto de referencia u origen.

inicialmente se encontraba en A y finalmente se encuentra en B. A ese desplazamiento se lo indica $\mathbf{d} = \overrightarrow{AB}$ y se lo representa gráficamente como una flecha con punto inicial en A y punto final en B.



El desplazamiento $\mathbf{d} = \overrightarrow{AB}$ definido por A y B

ACTIVIDAD

1. En la situación anterior, un objeto que se encuentra en un punto C distinto de A ¿Dónde fué a parar si su desplazamiento fue $\overrightarrow{AB}$? Respondan gráficamente.

2. Supongan que $A(1,-1)$ y $B(3,0)$ y consideren el desplazamiento $\mathbf{d} = \overrightarrow{AB}$. Respondan a las siguientes cuestiones:
   a. Un objeto se encuentra inicialmente en $C(4,0)$ ¿Dónde va a parar si se desplaza en $\overrightarrow{AB}$? Dibujen.
   b. Si $D(6,1)$ ¿Es correcto afirmar que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$? Controlen su respuesta.
   c. ¿Cómo puede saberse si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ a partir de las coordenadas de A, B, C y D ?

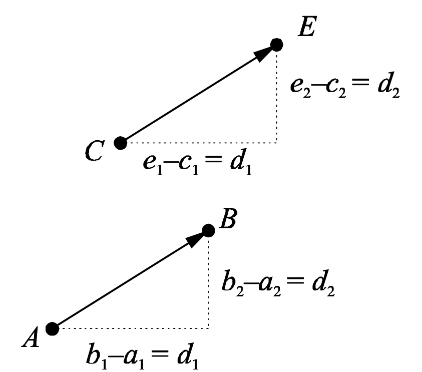
3. De la pregunta anterior puede concluirse que distintos segmentos orientados (o "flechas") pueden definir el mismo desplazamiento. Más aún, dado un desplazamiento $\mathbf{d}$ y un punto A siempre es posible encontrar un punto B de manera que $\mathbf{d} = \overrightarrow{AB}$. Por ejemplo sea $A(0,-1)$ y sea $\mathbf{d}$ el desplazamiento: "moverse 3 unidades en la dirección que forma un ángulo de 30° con la horizontal". Encuentren un punto B tal que $\mathbf{d} = \overrightarrow{AB}$. Dibujen.

4. Sean $A(2,-3)$; $B(1,1)$; y $O(0,0)$ ¿Cuáles serán las coordenadas del punto P que verifica $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP}$? Antes de hacer ninguna cuenta, dibujen.

5. En general si $A(a_1,a_2)$; $B(b_1,b_2)$; y $O(0,0)$ ¿Cuáles serán las coordenadas del punto P que verifica $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP}$? Primero dibujen.

Supongamos que $\mathbf{d}$ es un desplazamiento en el plano. Por lo que hemos visto, $\mathbf{d}$ puede ser representado como una flecha $\overrightarrow{AB}$. Si $\overrightarrow{CE}$ es otra flecha que representa a $\mathbf{d}$, hemos visto en la pregunta 2.c. que las relaciones entre las coordenadas de los cuatro puntos deben ser:

$$\begin{aligned} b_1 - a_1 &= e_1 - c_1 \\ b_2 - a_2 &= e_2 - c_2 \end{aligned}$$



Las flechas $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CE}$ representan al mismo vector $\mathbf{d}$

Si llamamos d_1y d_2 respectivamente a esas cantidades (ver dibujo), nuestro desplazamiento $\mathbf{d}$ queda completamente determinado por esos dos números. Ésto se indica escribiendo:

$$\mathbf{d} = \langle d_1, d_2 \rangle$$

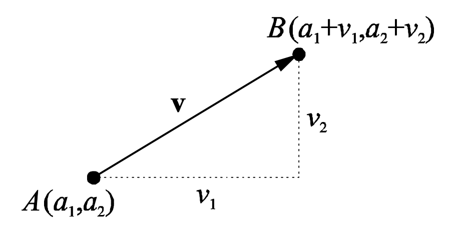
Los números d_1y d_2 se llaman las **componentes** de $\mathbf{d}$; notemos que la primera componente es el desplazamiento horizontal, y la segunda componente es el desplazamiento vertical. Notemos también que esas componentes pueden tener cualquier signo, o

.

también ser nulas. Toda esta discusión nos lleva a definir un **vector** en la siguiente forma:

Definición

Un **vector v** en el plano es un par ordenado $\langle v_1, v_2\rangle$ de números reales. A los números v_1 y v_2 se los denomina, respectivamente, **primera componente** y **segunda componente** del vector **v**.



El vector $v = \langle v_1, v_2\rangle$ reprentado con origen en A.

Un vector $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2\rangle$ puede representarse por una flecha con origen en cualquier punto $A(a_1, a_2)$ y extremo en $B(a_1 + v_1, a_2 + v_2)$ (ver figura al margen).

Recíprocamente, un par de puntos A y B del plano definen un vector que se denota $\overrightarrow{AB}$. Tal como hemos visto, ese vector escrito en componentes es:

$$\overrightarrow{AB} = \langle b_1 - a_1, b_2 - a_2\rangle$$

EJERCICIOS

1. A un vector $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2\rangle$ lo escribimos como $\overrightarrow{AB}$, como $\overrightarrow{CD}$ y como $\overrightarrow{OP}$, donde $O(0,0)$. Completen la siguiente tabla, en la que la primera fila ya está completada para ejemplificar.

$\langle v_1, v_2\rangle$	A	B	C	D	P	
$\langle 1, -2\rangle$	$(0, 3)$	$(1, 1)$	$(4, -2)$	$(5, -4)$	$(1, -2)$	DIBUJE
$\langle 5, 0\rangle$	$(-1, 1)$	$(\ ,\ )$	$(4, -2)$	$(\ ,\ )$	$(\ ,\ )$	DIBUJE
$\langle\ ,\ \rangle$	$(3, 2)$	$(-2, 4)$	$(\ ,\ )$	$(1, 1)$	$(\ ,\ )$	DIBUJE
$\langle\ ,\ \rangle$	$(\ ,\ )$	$(-1, 1)$	$(\ ,\ )$	$(0, 2)$	$(-1, 1)$	DIBUJE
$\langle 7,\ \rangle$	$(2, 2)$	$(\ ,\ )$	$(\ ,\ )$	$(-3, 2)$	$(\ , 2)$	DIBUJE

2. Dado un punto P en el plano, al vector determinado por la flecha con origen en $O(0,0)$ y final en P (esto es: el vector $\overrightarrow{OP}$) se lo llama **vector de posición del punto** P.

   a. Para cada punto A en la tabla anterior, representen el vector de posición de A.

   b. Si un punto P tiene coordenadas (x, y) ¿ Cuáles son las componentes de $\overrightarrow{OP}$?

3. La **longitud** o **módulo** de un vector $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2\rangle$ se define como el número $|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$. Interpreten gráficamente la definición y calculen el módulo de todos los vectores de la tabla de arriba.

4. Muestren que $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ es igual a la distancia entre el punto A y el punto B.

5. Al vector cuyas componentes son ambas nulas se lo llama **vector nulo** y se lo representa como $\mathbf{0}$ o bien como $\overrightarrow{0}$. Muestren que $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ si y solamente si $|\mathbf{v}| = 0$. ¿Cuáles son las componentes del vector $\overrightarrow{AA}$?

Operaciones entre vectores

ACTIVIDAD

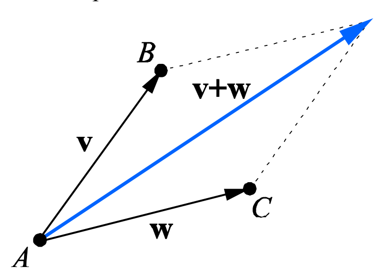
Un objeto se encuentra situado en un punto $P(2,-3)$. Si se desplaza en $\mathbf{d}_1 = \langle 4, 2\rangle$ y luego se desplaza en $\mathbf{d}_2 = \langle 1, 7\rangle$

1. ¿Cuál es la posición final del objeto?
2. ¿Cómo puede describirse el desplazamiento total?
3. ¿Qué pasa si el objeto se desplaza primero en $\mathbf{d}_2$ y después en $\mathbf{d}_1$?

Suma de vectores

La suma de vectores interpretada como desplazamientos sucesivos.

La primera operación importante que estudiaremos es la suma de dos vectores. Consideremos dos vectores $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2\rangle$ y $\mathbf{w} = \langle w_1, w_2\rangle$. Mostraremos tres formas de pensar (y definir) la suma de los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$:



La suma de vectores según la regla del paralelogramo.

Definición

Algebraicamente. La suma se define componente a componente: el vector suma de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ es el vector:

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \langle v_1 + w_1, v_2 + w_2\rangle$$

Como desplazamiento. Pensamos a $\mathbf{v}$ como un desplazamiento $\overrightarrow{AB}$ y a $\mathbf{w}$ como un desplazamiento $\overrightarrow{BC}$. La suma de los vectores será el desplazamiento $\overrightarrow{AC}$.

Mediante la regla del paralelogramo. Pensamos a $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ como desplazamientos con el mismo punto inicial, digamos $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$ y $\mathbf{w} = \overrightarrow{AC}$. Entonces la suma $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ será la diagonal del paralelogramo cuyos lados son los segmentos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

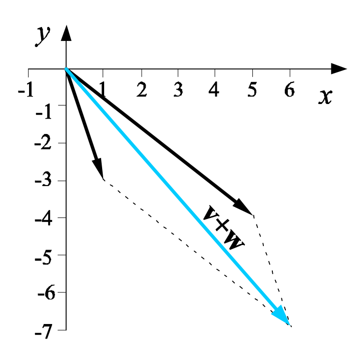
Las tres formas son equivalentes, en el sentido de que la suma resulta la misma en los tres casos. Cada una de ellas tendrá ventajas sobre las otras según el contexto en el que estemos trabajando. Noten que la regla del paralelogramo no puede usarse en el caso de vectores paralelos.

EJEMPLO

Sean $\mathbf{v} = \langle 1, -3\rangle$ y $\mathbf{w} = \langle 5, -4\rangle$ entonces tendremos:

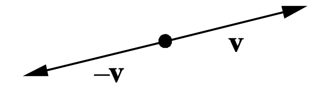
$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \langle 1 + 5, -3 + (-4)\rangle = \langle 6, -7\rangle$$

gráficamente:



Propiedades de la suma

- La suma de vectores es **conmutativa**, lo cual dice que sin importar el orden en que dos vectores se sumen, el resultado será el mismo vector. Esto es evidente usando, por ejemplo, la definición algebraica de la suma. Simbólicamente:
$$\mathbf{v}+\mathbf{w}=\mathbf{w}+\mathbf{v}$$
- También la suma es **asociativa**; esta propiedad nos dice que podemos hacer la suma de tres o más vectores, a partir de ir sumándolos de a dos, sin importar cómo agrupemos para hacerlo; también es fácilmente deducible de la definición algebraica de la suma.
$$(\mathbf{v}+\mathbf{w})+\mathbf{r}=\mathbf{v}+(\mathbf{w}+\mathbf{r})$$
- El vector nulo $\mathbf{0}=\langle 0,0\rangle$ es el **elemento neutro** de la suma por cuanto:
$$\mathbf{v}+\mathbf{0}=\mathbf{v}$$
- Todo vector $\mathbf{v}$ tiene un **inverso aditivo** que indicamos con $-\mathbf{v}$. Algebraicamente si $\mathbf{v}=\langle v_1,v_2\rangle$ definimos $-\mathbf{v}=\langle -v_1,-v_2\rangle$. En términos de desplazamientos si $\mathbf{v}=\overrightarrow{AB}$ entonces $-\mathbf{v}=\overrightarrow{BA}$. En la representación de "flechas con el mismo origen" el inverso aditivo de $\mathbf{v}$ está representado por la flecha opuesta. En cualquiera de las dos formas es claro que:
$$\mathbf{v}+(-\mathbf{v})=\mathbf{0}$$



El vector **v** y su opuesto **-v**.

Producto por un escalar

Definición

Si t es un número real cualquiera y $\mathbf{v}=\langle v_1,v_2\rangle$ es un vector, se define el producto del número t por el vector $\mathbf{v}$ de la siguiente manera:
$$t\mathbf{v}=\langle tv_1,tv_2\rangle$$

EJEMPLO

1. $2.\langle -2,3\rangle=\langle 2.(-2),2.3\rangle=\langle -4,6\rangle$
2. Consideremos dos puntos $A(a_1,a_2)$ y $B(b_1,b_2)$. Dado un vector $\overrightarrow{AB}$ si escribi-

$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$

mos al vector $t\overrightarrow{AB}$ con origen en A, digamos $t\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP}$, entonces el punto P está en la recta que pasa por A y B.

Puede verse como ejercicio que para cualquier punto P en la recta que pasa por A y B puede encontrarse un número t de manera que

$$t\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP}$$

Propiedades del producto por un escalar

El producto de un número por un vector tiene las siguientes propiedades, que se pueden demostrar en forma sencilla a partir de la definición:

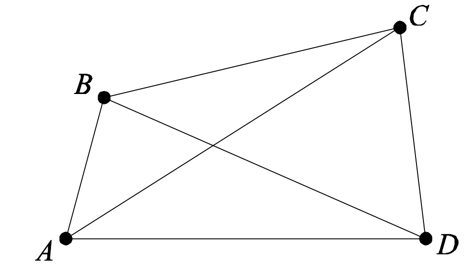
- $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$
- $(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$
- $t(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = t\mathbf{v} + t\mathbf{w}$
- $(t + s)\mathbf{v} = t\mathbf{v} + s\mathbf{v}$
- $(st)\mathbf{v} = s(t\mathbf{v})$



EJERCICIOS

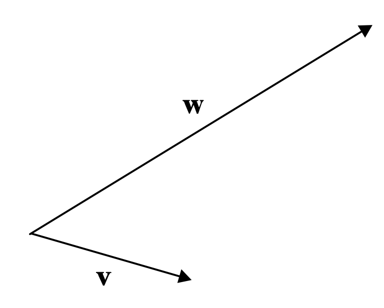


1. Interpreten gráficamente las propiedades del producto de un vector por un escalar.



2. Escriban las siguientes combinaciones de vectores como un solo vector:
   a. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$
   b. $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$
   c. $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DC}$
   d. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$

3. A partir de los vectores del dibujo, grafiquen a los siguientes vectores:



   a. $\mathbf{v} + \mathbf{w}$
   b. $2\mathbf{v}$
   c. $\mathbf{v} - \mathbf{w}$
   d. $2\mathbf{v} + \mathbf{w}$

e. $-\frac{1}{2}\mathbf{v}$

f. $\mathbf{w} - 3\mathbf{v}$

4. Encuentren $|\mathbf{v}|$; $\mathbf{v} + \mathbf{w}$; $\mathbf{v} - \mathbf{w}$; $2\mathbf{v}+3\mathbf{w}$ en los siguientes casos:
   a. $\mathbf{v} = \langle 2, -1\rangle$ y $\mathbf{w} = \langle 4, 5\rangle$
   b. $\mathbf{v} = \langle 6, 3\rangle$ y $\mathbf{w} = \langle 0, -2\rangle$

Definición

Una **combinación lineal** de los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ es cualquier vector de la forma $s\mathbf{v}+t\mathbf{w}$ donde s y t son números cualesquiera.

EJEMPLO

Si $\mathbf{v} = \langle 1, -2\rangle$ y $\mathbf{w} = \langle 0, 3\rangle$ entonces los siguientes vectores son combinaciones lineales de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$:

1. $(-1)\mathbf{v} + \mathbf{5w} = (-1)\langle 1, -2\rangle + 5\langle 0, 3\rangle = \langle -1, 2\rangle + \langle 0, 15\rangle = \langle -1, 17\rangle$
2. $0\mathbf{v} + \mathbf{2w} = 0\langle 1, -2\rangle + 2\langle 0, 3\rangle = \langle 0, 0\rangle + \langle 0, 6\rangle = \langle 0, 6\rangle$
3. ¿Es el vector $\langle 4, -1\rangle$ una combinación lineal de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$?

EJERCICIOS

1. Llamaremos **vectores canónicos del plano (o versores en el plano)** a los vectores: $\mathbf{i} = \langle 1, 0\rangle$ y $\mathbf{j} = \langle 0, 1\rangle$. Muestren que todo vector del plano $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2\rangle$ puede escribirse como combinación lineal de los versores $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$. Interpreten gráficamente.

2. Consideren los vectores $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{w} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$. Muestren que todo vector del plano puede escribirse como combinación lineal de **v** y **w.**

3. Consideremos la situación siguiente: Se disponen de dos tipos de mezcla de albañilería, la mezcla A se compone de 3 partes de arena, 1 parte de cal y 2 partes de cemento. La mezcla B se compone de 1 parte de arena, 1 parte de cal y 2 partes de cemento.
   a. Si representamos las proporciones en la primera mezcla con el vector $\mathbf{v_A} = \langle 3, 1, 2\rangle$ y en la segunda con el vector $\mathbf{v_B} = \langle 1, 1, 2\rangle$ ¿Cómo se interpretará un vector que sea combinación lineal de $\mathbf{v_A}$ y $\mathbf{v_B}$?
   b. ¿Es posible conseguir una mezcla de tipo $\langle 7/2, 5/2, 5\rangle$ a partir de las mezclas disponibles? ¿Y una del tipo $\langle 4, 2, 5\rangle$?

Definición

Dos vectores **v** y **w** no nulos se dicen **paralelos** o **colineales** si uno es múltiplo del otro, esto es: si existe un número real α (necesariamente distinto de 0) tal que $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{w}$. Si **v** y **w** son paralelos lo indicaremos $\mathbf{v} \parallel \mathbf{w}$

EJERCICIOS

1. Determinen en los siguientes casos si los vectores **v** y **w** son paralelos:
   a. $\mathbf{v} = \langle 1, 4\rangle$ y $\mathbf{w} = \langle -2, -8\rangle$
   b. $\mathbf{v} = \langle 3, -2\rangle$ y $\mathbf{w} = \langle 6, 4\rangle$
   c. $\mathbf{v} = \langle -4, 12\rangle$ y $\mathbf{w} = \langle 1, -3\rangle$
2. Los vectores $\mathbf{v} = \langle 6, -2\rangle$ y $\mathbf{w} = \langle 1, a\rangle$ son paralelos ¿Cuál es el valor de a?

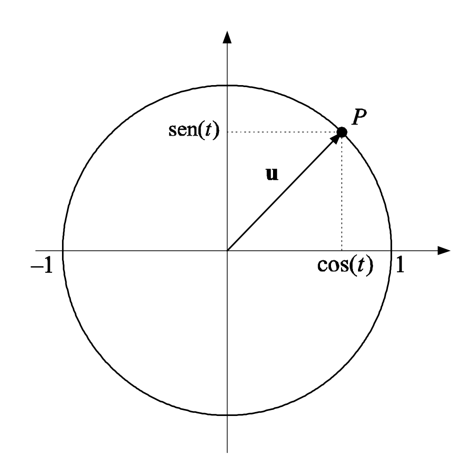
   Recordemos que el **módulo** o **longitud** de un vector $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$ es el número $|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
3. Usando las definiciones muestren que dado un número α y un vector **w** se tiene que $|\alpha\mathbf{w}| = |\alpha|\,|\mathbf{w}|$. Interpreten gráficamente.
4. Un vector **w** se dice **unitario** si $|\mathbf{w}| = 1$.
   a. ¿Cuáles de los siguientes vectores son unitarios?: $\langle 1, 0\rangle$; $\langle 0, 1\rangle$; $\langle 1, 1\rangle$; $\left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\rangle$; $\langle -1, 0\rangle$; $\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$
   b. Muestren que si el vector $\overrightarrow{AP}$ es unitario, entonces el punto P está sobre la circunferencia de radio 1 y centro en A .
   c. Muestren que si **w** es un vector no nulo entonces $\dfrac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}$ es unitario.

   Observación: Si **w** es un vector no nulo entonces puede escribirse como $\mathbf{w} = |\mathbf{w}| \dfrac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}$ y por lo tanto todo vector **w** es de la forma $\mathbf{w} = |\mathbf{w}|\,\mathbf{u}$ donde **u** es unitario. Al vector **u** lo llamamos la **dirección determinada por w**.
5. Encuentren las direcciones determinadas por los vectores $\mathbf{v} = \langle 1, 1\rangle$; $\mathbf{w} = \langle 2, 0\rangle$; $\mathbf{r} = \langle -2, 0\rangle$; $\mathbf{s} = \langle -2, -2\rangle$.
6. Encuentren un vector que tenga la misma dirección y sentido que $\mathbf{v} = \langle 1, 1\rangle$ y cuya longitud sea igual a:
   a. 1 b. 3 c. $\sqrt{5}$

Vectores en coordenadas polares

Consideremos a un vector unitario $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$. Se tendrá $|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = 1$, de manera que el punto $P\,(u_1, u_2)$ es un punto de la circunferencia unitaria. Por lo tanto (recordar funciones circulares) existirá un único número t comprendido entre 0 y 2π tal que:

$$\begin{aligned} u_1 &= \cos t \\ u_2 &= \operatorname{sen} t \end{aligned}$$



Las componentes de un vector unitario $\mathbf{u}$ son de la forma $\langle \cos t, \operatorname{sen} t \rangle$

De manera que un vector unitario es siempre de la forma $\mathbf{u} = \langle \cos t, \operatorname{sen} t \rangle$ para algún valor de t , $0 \leq t < 2\pi$. Si consideramos ahora un vector cualquiera $\mathbf{v}$ hemos visto en la observación de la página 146, que $\mathbf{v} = |\mathbf{v}|\ \mathbf{u}$ donde $\mathbf{u}$ es unitario; en definitiva tendremos que cualquier vector $\mathbf{v}$ puede escribirse en la forma

$$\mathbf{v} = |\mathbf{v}|\ \langle \cos t, \operatorname{sen} t \rangle \ \text{ con } 0 \leq t < 2\pi$$

cuando hacemos esto diremos que hemos escrito a $\mathbf{v}$ en **coordenadas polares**. Al número t se lo suele llamar el **argumento** del vector $\mathbf{v}$.

EJEMPLO

Escribamos al vector $\mathbf{v} = \langle 1, 1 \rangle$ en coordenadas polares. Tenemos que $|\mathbf{v}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Por lo tanto:

$$\mathbf{v} = \sqrt{2} \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle = \sqrt{2} \left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$$

Entonces el argumento t verifica:

$$\begin{aligned} \cos t &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{sen} t &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

El único arco t entre 0 y 2π que cumple con lo anterior es $t = \pi/4$. En consecuencia:

$$\mathbf{v} = \sqrt{2}\,\langle \cos \pi/4, \operatorname{sen} \pi/4 \rangle$$

Todo vector no nulo $\mathbf{v}$ puede escribirse en coordenadas polares: $\mathbf{v} = |\mathbf{v}|\ \langle \cos t, \operatorname{sen} t \rangle$

EJERCICIOS

Escriban en coordenadas polares a los siguientes vectores: $\langle 2, 0 \rangle$; $\langle 1, \sqrt{3} \rangle$; $\langle -1, 1 \rangle$

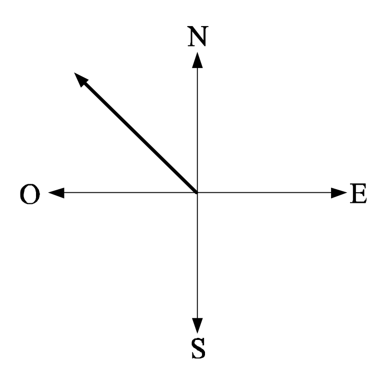
Las coordenadas polares permiten la traducción entre distintas descripciones de un vector. Veamos su utilidad en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO

1. En cierto lugar la velocidad del viento es de 30 km/h desde la dirección sudeste.

Si pensamos la dirección del viento como un vector ¿Cuáles serán sus componentes?

Para responder, instalamos un sistema de ejes cartesianos en el cual situamos los puntos cardinales en la manera usual (ver al margen).



Ubicamos los puntos cardinales en un sistema de ejes cartesianos.

Si $\mathbf{v}$ es el vector que representa la velocidad del viento, por el enunciado tendremos que $|\mathbf{v}| = 30$. Además, la dirección de $\mathbf{v}$ es la de la bisectriz del cuadrante II, de manera que el argumento de $\mathbf{v}$ será $\pi/2 + \pi/4 = 3\pi/4$. En consecuencia:

$$\mathbf{v} = 30\,\langle\cos 3\pi/4, \operatorname{sen} 3\pi/4\rangle = 30\left\langle -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\rangle = \left\langle -15\sqrt{2}, 15\sqrt{2}\right\rangle$$

2. Supongamos ahora que una avioneta viaja rumbo al Norte a 140 km/h. ¿Cuál será el rumbo real de la avioneta y la rapidez de su movimiento, teniendo en cuenta la acción del viento? (Con **rapidez** nos referimos al módulo del vector velocidad). Si el avión tiene dirección norte y su rapidez es de 140 km/h entonces su velocidad, pensada vectorialmente, será:

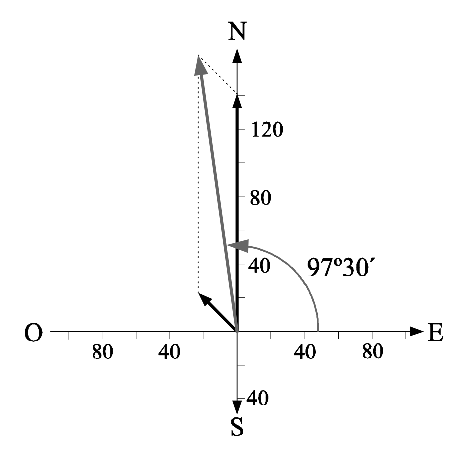
$$\mathbf{w} = 140\,\langle\cos\pi/2, \operatorname{sen}\pi/2\rangle = 140\,\langle 0, 1\rangle = \langle 0, 140\rangle$$

La velocidad real del avión estará dada por la suma de la velocidad del viento $\mathbf{v}$ y la velocidad del avión $\mathbf{w}$:

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \left\langle -15\sqrt{2}, 15\sqrt{2}\right\rangle + \langle 0, 140\rangle = \left\langle -15\sqrt{2}, 15\sqrt{2} + 140\right\rangle$$

La rapidez es el módulo de ese vector:

$$|\mathbf{v} + \mathbf{w}| = \sqrt{\left(-15\sqrt{2}\right)^2 + \left(15\sqrt{2} + 140\right)^2} \simeq 162.6 \text{ km/h}$$



Por acción del viento, la avioneta se desvía levemente hacia el Oeste y aumenta su rapidez.

Nos falta el argumento t de $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ que nos dará la dirección. Tenemos

$$\cos t = \frac{-15\sqrt{2}}{162.6} \simeq -0.13046 \Longrightarrow t = 1.7016 \text{ ó } t = 4.5817$$

$$\operatorname{sen} t = \frac{15\sqrt{2} + 140}{162.6} \simeq 0.99147 \Longrightarrow t = 1.4401 \text{ ó } t = 1.7016$$

El argumento de $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ es por lo tanto el arco de longitud 1.7016, que corresponde a un ángulo de aproximadamente $97^o 30'$. La repuesta es coherente, el viento hace que el avión aumente su rapidez y se desvíe levemente hacia el Oeste, como se ve en el gráfico.

EJERCICIOS

Los motores de un avión producen un empuje que da como resultado una velocidad de 360 km/h en aire tranquilo. En un vuelo, la velocidad del viento está dada por el vector $\langle 20, 30\rangle$¿En qué dirección deberá orientarse el avión para volar hacia el Norte?

Vectores en el espacio. Coordenadas en R^3

De manera análoga a lo que hemos hecho para definir (y comenzar a entender) los vectores en el plano, podemos definir el concepto de vector en el espacio tridimensional. Formalmente, un vector en el espacio es una 3-upla de números reales, lo que significa una lista ordenada de tres números cualesquiera:

$$\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$$

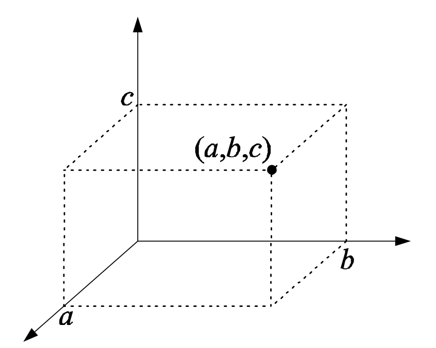


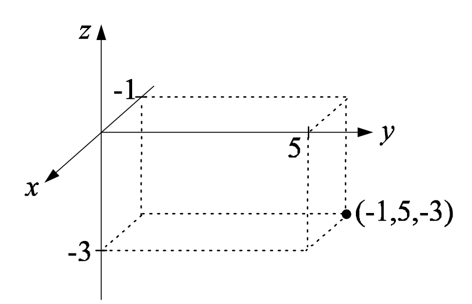
Figura 1. La representación en el espacio del punto de coordenadas (a, b, c).

Dada la estrecha relación entre un vector definido por sus componentes y las coordenadas de los puntos en el espacio, es conveniente repasar un poco este último tema.

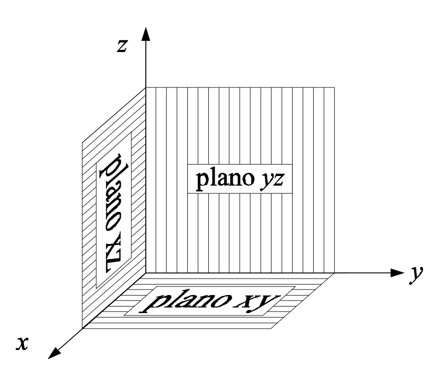
Un punto en el espacio puede representarse por una terna (a, b, c) de números reales. Gráficamente esos números indican las coordenadas del punto, de manera que lo podemos ubicar en un sistema de tres ejes cartesianos en la forma que muestra la Figura 1 al margen.

Encuentren y anoten en la Figura 1 las coordenadas de los demás vértices de la caja punteada.

EJEMPLO



Si queremos ubicar el punto $(-1, 5, -3)$ podemos, por ejemplo, proceder de esta manera: desde el origen llegamos a $x = -1$ sobre el eje x; desde allí movemos 5 unidades en el sentido paralelo al eje y; por último, vamos 3 unidades en la dirección paralela al eje z, por supuesto en el sentido negativo.

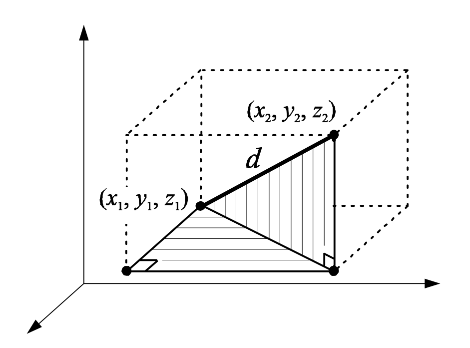


Los planos coordenados.

Cada par de ejes: xy, xz e yz determina un plano, llamado **plano coordenado**. Los mostramos en el gráfico al margen.

EJERCICIOS

1. Ubiquen en el espacio coordenado los siguientes puntos: $(3, -5, 2)$; $(8, 6, -3)$; $(1, 0, 7)$.
2. El plano coordenado xz tiene por ecuación $y = 0$ ¿cuál es la ecuación del plano xy? ¿y la del plano yz?
3. ¿Cuál es la ecuación de un plano paralelo al plano xy? Encuentren la ecuación de los planos paralelos al plano xz y de los planos paralelos al plano yz?
4. Dibujen en un sistema de ejes a los planos siguientes:
   a. $z = -1$
   b. $y = 3$
   c. $x = 5$



$\mathbf{d}$ es la distancia entre $P(x_1, y_1, z_1)$ y $Q(x_2, y_2, z_2)$

5. La **distancia entre dos puntos** $P(x_1, y_1, z_1)$ y $Q(x_2, y_2, z_2)$ es:

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$
verifiquen la definición anterior a partir del dibujo del margen.

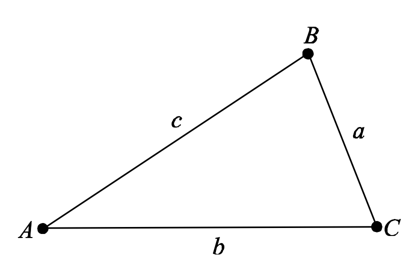


6. Calculen la distancia entre P y Q:
   a. $P(-1, 0, 2)$; $Q(1, 2, -3)$
   b. $P(5, 5, 2)$; $Q(1, 3, -4)$

7. Una esfera de radio $r > 0$ que tiene centro en el punto de coordenadas (a, b, c) está integrada por todos los puntos del espacio cuya distancia al centro es igual a r.
   a. Encuentren la ecuación cartesiana de esa esfera.
   b. ¿Cuál es la ecuación de la esfera de centro $(-2, 0, 3)$ y radio 3? Dibujen.
   c. ¿Cuáles son el centro y el radio de la esfera definida por la ecuación $(x - 1)^2 + y^2 + 4y + z^2 = 0$?

6.2 El producto punto

El ángulo entre dos vectores



Según el Teorema del Coseno: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}$

Recordemos el llamado Teorema del coseno. Si se tiene un triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ en el cual las longitudes de los lados son a, b, c (ver dibujo al margen) entonces:
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}$$

En la Actividad siguiente reinterpretaremos el teorema anterior en un contexto vectorial.

ACTIVIDAD

Consideremos dos vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ no nulos y no paralelos.

1. Dibujen a esos vectores como flechas con el mismo origen.
2. Dibujen al vector diferencia $\mathbf{w} - \mathbf{v}$ como una flecha con origen en el punto final de $\mathbf{v}$.
3. Si dibujaron bien ha quedado dibujado un triángulo ¿Cuáles son las longitudes de los lados de ese triángulo?
4. Considerando como ángulo $\widehat{A}$ al formado por los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ ¿Cuál es la relación que provee el Teorema del coseno?

Si a la relación obtenida en la actividad anterior:

$$|\mathbf{w}-\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{w}|^2 - 2\,|\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}|\cos\widehat{A} \qquad (1)$$

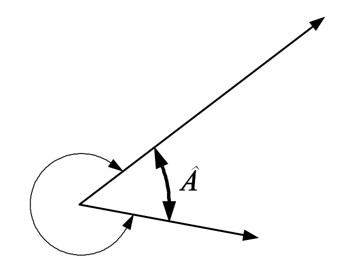
la escribimos en términos de las componentes de $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2\rangle$ y de $\mathbf{w} = \langle w_1, w_2\rangle$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
(w_1-v_1)^2 + (w_2-v_2)^2 &= v_1^2+v_2^2+w_1^2+w_2^2 - 2\,|\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}|\cos\widehat{A}\\
w_1^2 - 2w_1v_1 + v_1^2 + v_2^2 - 2w_2v_2 + w_2^2 &= v_1^2+v_2^2+w_1^2+w_2^2 - 2\,|\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}|\cos\widehat{A}\\
-2w_1v_1 - 2w_2v_2 &= -2\,|\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}|\cos\widehat{A}\\
w_1v_1 + w_2v_2 &= |\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}|\cos\widehat{A}
\end{aligned}$$

De manera que si $\widehat{A}$ es el ángulo formado por los vectores tenemos:

$$\cos\widehat{A} = \frac{w_1v_1 + w_2v_2}{|\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}|}$$

EJEMPLO



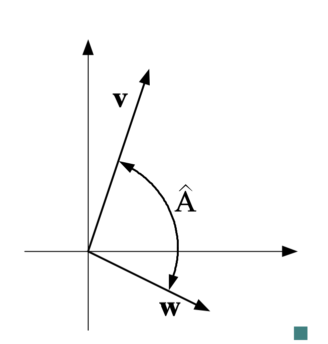
Dos vectores determinan, en general, dos ángulos.

Determinemos el ángulo que forman los vectores $\mathbf{v} = \langle 1, 3\rangle$ y $\mathbf{w} = \langle 2, -1\rangle$. Por lo que hemos visto:

$$\begin{aligned}
\cos\widehat{A} &= \frac{1.2 + 3.(-1)}{\sqrt{1^2+3^2}.\sqrt{2^2+(-1)^2}}\\
\cos\widehat{A} &= \frac{-1}{\sqrt{10}\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{50}}
\end{aligned}$$

Las flechas que representan a dos vectores determinan, en general, dos ángulos (ver al margen). Si los vectores tienen direcciones opuestas ambos ángulos miden π. Si no es el caso, uno sólo de los ángulos estará entre 0 y π. A ése ángulo lo llamaremos el **ángulo entre los vectores**. Por otro lado, la función arccos devuelve valores justamente entre 0 y π. De manera que:

$$\widehat{A} = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{50}}\right) \simeq \arccos(-0.141\,42) \simeq 1.7127 \simeq 0.545\pi$$



El ángulo entre los vectores $\mathbf{v} = \langle 1, 3\rangle$ y $\mathbf{w} = \langle 2, -1\rangle$

El producto punto

Lo visto en la sección anterior motiva la siguiente definición

Definición

Dados dos vectores $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2\rangle$ y $\mathbf{w} = \langle w_1, w_2\rangle$ se denomina **producto punto** de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ al número:

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = v_1w_1 + v_2w_2$$

Observación: Si bien lo hemos definido para vectores en el plano, el producto punto está definido de igual manera para dos vectores en el espacio (o en cualquier número

de dimensiones). Por ejemplo, para $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ y $\mathbf{w} = \langle w_1, w_2, v_3 \rangle$:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$$

Todas las propiedades que se enunciarán en lo que sigue para vectores en dos dimensiones, serán válidas (salvo indicación expresa en contrario) para vectores en el espacio.

De la cuenta hecha en el punto anterior cuando discutimos el ángulo entre dos vectores, se obtiene la siguiente caracterización geométrica del producto punto:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = |\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}| \cos \widehat{A} \qquad (2)$$

donde $\widehat{A}$ es el ángulo formado por $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$.

De la relación establecida en la igualdad (1) y la caracterización geométrica del producto punto de la ecuación (2) obtenemos:

$$|\mathbf{w} - \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{w}|^2 - 2 \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$$

lo cual sugiere, por analogía con el cuadrado de un binomio, el nombre de "producto punto" para esta operación entre vectores.

EJERCICIOS

Determinen el ángulo formado por los vectores $\mathbf{v} = \langle 1, -1, 0 \rangle$ y $\mathbf{w} = \langle 5, 3, 7 \rangle$. Expresen el resultado en radianes y en grados.

Observemos que dos vectores no nulos $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son perpendiculares si y sólo si $\widehat{A} = \pi/2$. Puesto que el ángulo $\widehat{A}$ está comprendido entre 0 y π, la condición $\widehat{A} = \pi/2$ se cumple si y solamente si $\cos \widehat{A} = 0$. Por lo tanto tenemos la siguiente propiedad:

Teorema

Dos vectores no nulos $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son perpendiculares si y sólo si $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$.

Demostración: Por la discusión anterior $\mathbf{v}$ es perpendicular a $\mathbf{w}$ si y sólo si $\cos \widehat{A} = 0$. Como

$$\cos \widehat{A} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}|}$$

se tiene que $\cos \widehat{A} = 0$ si y sólo si $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$.

Si los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son perpendiculares, también diremos que son **ortogonales** o **normales** entre sí. Lo indicamos $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$.

Propiedades del producto punto

Supongamos que $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ y $\mathbf{r}$ son vectores cualesquiera y α es un número real. Entonces:

1. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$

2. $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} + \mathbf{r}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}$

3. $\alpha(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = \alpha\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\alpha}\mathbf{w}$

4. $\mathbf{0} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$

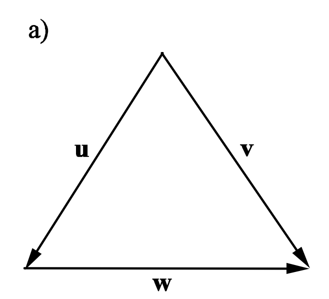
5. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{v}|^2$

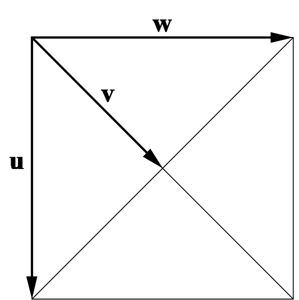
EJERCICIOS

1. Calculen $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ en los siguientes casos:
   a. $\mathbf{v} = \langle 1, -1 \rangle$; $\mathbf{w} = \langle -2, 2 \rangle$
   b. $\mathbf{v} = \langle 5, 2 \rangle$; $\mathbf{w} = \langle -3, 7 \rangle$
   c. $\mathbf{v} = \langle 1, -1, 4 \rangle$; $\mathbf{w} = \langle 5, 4, -3 \rangle$
   d. $\mathbf{v} = \langle 1, -1 \rangle$; $\mathbf{w} = \langle -2, -2 \rangle$
   e. $\mathbf{v} = \langle 4, -6, -1 \rangle$; $\mathbf{w} = \langle -8, -5, -2 \rangle$

2. Indiquen cuáles de las parejas de vectores del punto anterior son perpendiculares.

3. Sabiendo que $\mathbf{u}$ es unitario, calculen $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ y $\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}$ en cada caso (el triángulo es equilátero y la otra figura es un cuadrado):





4. Encuentren un vector perpendicular al vector dado (en general hay infinitos):
   a. $\mathbf{v} = \langle 1, -3 \rangle$
   b. $\mathbf{v} = \langle 1, -1, 9 \rangle$
   c. $\mathbf{v} = \langle 5, -2, 6 \rangle$
   d. $\mathbf{v} = \langle -2, 8 \rangle$

5. ¿Para qué valores de b los vectores $\langle -6, b, 2 \rangle$ y $\left\langle b, b^2, b \right\rangle$ son ortogonales?

6. Sea $\mathbf{v} = \langle 2, -3 \rangle$. Consideren el conjunto de puntos del plano siguiente $L = \left\{ P : \overrightarrow{OP} \perp \mathbf{v} \right\}$. Gráficamente ¿qué es el conjunto L? Si $P(x, y)$ ¿qué condición deben cumplir x e y para que $P \in L$?

7. Si L_1 es la recta que pasa por $A(-1, 3)$ y $B(4, 5)$ y L_2 es la recta que pasa por A y por $C(-3, 3)$ ¿Cómo harían para saber si ambas rectas son perpendiculares?

6.3 Ecuaciones de las rectas y los planos

Ecuación vectorial de una recta

ACTIVIDAD

1. Consideren el vector $\mathbf{v} = \langle -1, 3, -2 \rangle$ ¿Cómo describirían al conjunto de los puntos $P(x, y, z)$ del espacio tales que $\overrightarrow{OP}$ es un múltiplo de $\mathbf{v}$? Dibujen..

2. Consideremos ahora dos puntos, digamos $A(2, 3, -5)$ y $B(0, 1, 2)$. Describan por medio de una expresión al conjunto de los puntos $P(x, y, z)$ tales que $\overrightarrow{AP}$ sea un múltiplo de $\overrightarrow{AB}$ ¿Cómo se ve ese conjunto en el espacio? ¿El punto A pertenece al conjunto? ¿Y el punto B ? Dibujen.

Observación: En relación al punto 2 de la actividad anterior, supongamos que A y B son dos puntos distintos (de $\mathbf{R}^2$ o de $\mathbf{R}^3$). Si L es la recta que pasa por A y B, entonces un punto P estará en L si y solamente si

$$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$$

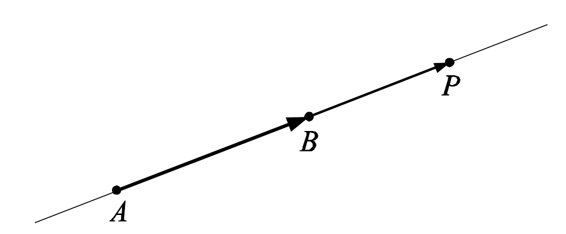
para algún valor de $t \in \mathbf{R}$. En particular, para $t = 0$ se obtiene:

$$0.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\mathbf{0}} = \overrightarrow{AA}$$

es decir que A está en L. De la misma forma, para $t = 1$:

$$1.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$$

se obtiene el punto B.



Definición

A la ecuación

$$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$$

se la llama **ecuación vectorial de la recta** que pasa por A y B.

Veamos qué queda si escribimos la ecuación anterior usando coordenadas. Para ello, supongamos que $A(a_1, a_2, a_3)$, $B\,(b_1, b_2, b_3)$ y $P(x, y, z)$. Entonces:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= \langle x - a_1, y - a_2, z - a_3 \rangle \\ \overrightarrow{AB} &= \langle b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3 \rangle \end{aligned}$$

y nuestra ecuación vectorial queda:

$$\langle x - a_1, y - a_2, z - a_3 \rangle = t \langle b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3 \rangle$$

igualando componente a componente:

$$\begin{aligned} x - a_1 &= t(b_1 - a_1) \\ y - a_2 &= t(b_2 - a_2) \\ x - a_3 &= t(b_3 - a_3) \end{aligned}$$

y reordenando:

$$\begin{aligned} x &= t(b_1 - a_1) + a_1 \\ y &= t(b_2 - a_2) + a_2 \\ z &= t(b_3 - a_3) + a_3 \end{aligned}$$

éstas son las **ecuaciones paramétricas** de L.

EJEMPLO

La recta que pasa por $A\,(1, -2, 3)$ y $B\,(5, 7, -1)$ tiene ecuación vectorial

$$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB} \qquad (*)$$

donde $P\,(x, y, z)$ es un punto en la recta. Si escribimos lo anterior usando coordenadas:

$$\langle x - 1, y + 2, z - 3 \rangle = t \langle 4, 9, -4 \rangle$$

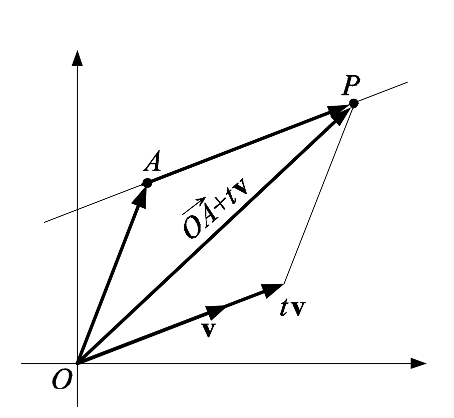
y las ecuaciones paramétricas para L quedan:

$$\begin{aligned} x &= 4t + 1 \\ y &= 9t - 2 \\ z &= -4t + 3 \end{aligned}$$

Al vector $\overrightarrow{AB} = \langle 4, 9, -4 \rangle$ se lo llama **vector director** de L.

Si en general, en lugar del vector $\overrightarrow{AB}$ consideramos un vector no nulo $\mathbf{v}$ y un punto A también queda determinada una recta L y la ecuación (*) quedará:

$$\overrightarrow{OP} = t\mathbf{v} + \overrightarrow{OA}$$



La ecuación anterior debe interpretarse en el sentido siguiente: un punto P está sobre la recta si y solamente si existe un valor de t para el cual se verifica la igualdad anterior. Al vector $\mathbf{v}$ se lo denomina **vector director** de la recta. Interpretamos gráficamente la situación en la figura del margen.

¿Cómo se verá la ecuación vectorial si la escribimos en coordenadas? Para saberlo, supongamos que $v = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, $A(a_1, a_2, a_3)$ y $P(x, y, z)$. Entonces tendremos:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \langle x, y, z \rangle \\ \overrightarrow{OA} &= \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \end{aligned}$$

Y en coordenadas la ecuación queda:

$$\langle x, y, z\rangle = t\ \langle v_1, v_2, v_3\rangle + \langle a_1, a_2, a_3\rangle$$

Igualando componentes en la ecuación vectorial obtenemos:

$$\begin{cases} x = tv_1 + a_1 \\ y = tv_2 + a_2 \\ z = tv_3 + a_3 \end{cases}$$

El conjunto de cuaciones anterior se denomina **sistema de ecuaciones paramétricas** de la recta. Para cada valor de t, reemplazando en las ecuaciones, se obtendrán las coordenadas de un punto sobre la recta. En particular, haciendo $t = 0$ se obtienen las coordenadas de A.

EJERCICIOS

1. Encuentren la ecuación vectorial y las ecuaciones paramétricas de la recta dirigida por el vector $\mathbf{v}$ que pasa por el punto A en los siguientes casos:
   a. $\mathbf{v} = \langle 2, 0, 3\rangle\ ; A\,(1, 1, 1)$
   b. $\mathbf{v} = \langle 1, 0, 0\rangle\ ; A\,(0, 0, 0)$
   c. $\mathbf{v} = \langle 1, -2\rangle\ ; A\,(-8, -5)$
2. Encuentren la ecuación vectorial y las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos A y B en los siguientes casos:
   a. $A\,(1, 1, 1)\ ; B\,(2, 0, 3)$
   b. $A\,(1, 0, -4)\ ; B\,(-6, -1, 4)$
   c. $A\,(1, 7)\ ; B\,(2, -6)$
   d. $A\,(-2, 5)\ ; B\,(1/2, 7)$
3. En las rectas anteriores determinen tres puntos sobre cada recta, diferentes a los dados.
4. ¿Cómo harían para saber si los puntos $(2, 4, 7)$, $(4, 2, 9)$ y $(0, 6, 5)$ están alineados?
5. **Rectas paralelas.**
   a. ¿Qué hay que observar para saber si las rectas $L_1 : \overrightarrow{AP} = t\mathbf{v}$ y $L_2 : \overrightarrow{BP} = t\mathbf{w}$ son paralelas?
   b. Determinen si las siguientes rectas son paralelas: $L_1 : x = 1 + 2t\ \ ;\ \ y = 7 + 4t\ \ ;\ \ z = 9 - 8t$; y L_2 es la recta que pasa por $(-1, 3, 4)$ y está dirigida por el vector $\mathbf{v} = \langle -3, -6, 12\rangle$.
   c. Encuentren una recta paralela a L_1 que pase por el punto $(1, 0, -2)$.
6. **Rectas perpendiculares**
   a. ¿Qué hay que observar para saber si las rectas $L_1 : \overrightarrow{AP} = t\mathbf{v}$ y $L_2 : \overrightarrow{BP} = t\mathbf{w}$ son perpendiculares?
   b. Encuentren una recta que sea perpendicular a la recta $L_1 : x = 1 + 2t\ \ ;$

$y = 7 + 4t$; $z = 9 - 8t$ y pase por el punto $(0, -2, 8)$.

Observación: Para una recta dada, la ecuación vectorial no es única. Cualquier vector paralelo al dado y cualquier otro punto de la recta darán origen a una ecuación vectorial distinta, pero que define a la misma recta como conjunto de puntos en el plano.

ACTIVIDAD

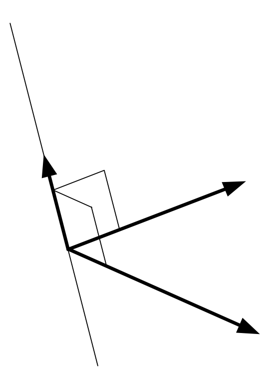
Lo anterior puede aprovecharse de la siguiente manera: la ecuación vectorial, o equivalentemente las ecuaciones paramétricas, no solamente permiten describir a la recta como conjunto de puntos (del plano o del espacio) sino que suministra también una manera de recorrerla. Veamos:

Una mosca vuela en línea recta. Su posición en el instante t viene dada por la ecuación vectorial:

$$\overrightarrow{OP} = t\,\langle -1, 2, 1\rangle + \langle 0, 3, 1\rangle$$

1. ¿Dónde se encontraba la mosca en $t = 0$? ¿Y en $t = 1$?
2. ¿Cuál fue su desplazamiento entre $t = 1$ y $t = 4$?
3. ¿Cómo definiría la velocidad media de la mosca entre $t = 1$ y $t = 4$?
4. Si consideramos el intervalo $[t_1, t_2]$ de longitud $\Delta t = t_2 - t_1$ ¿Cuál será el desplazamiento de la mosca en ése intervalo? ¿Cómo definiría la velocidad media de la mosca en ese intervalo?
5. Supongan ahora que la posición está dada por $\overrightarrow{OP} = t\,\langle -2, 4, 2\rangle + \langle -1, 5, 2\rangle$. Muestren que la mosca se mueve sobre la misma recta. ¿qué diferencias pueden establecer entre el movimiento de la mosca en ambos casos?

Ecuación implícita de un plano en el espacio



Consideremos el siguiente problema:

Dados dos vectores no paralelos en el espacio encontrar un vector no nulo que sea normal (es decir: perpendicular) a ambos.

Geométricamente, vemos que el problema tiene infinitas soluciones, en el sentido que si encontramos un vector $\mathbf{v}$ que resuelva nuestro problema, cualquier múltiplo no nulo de él también será solución.

EJEMPLO

Consideremos los vectores $\mathbf{v} = \langle 1, -1, 2\rangle$ y $\mathbf{w} = \langle -2, 3, 1\rangle$ y tratemos de encontrar

un vector perpendicular a ambos. Supongamos que $\langle x, y, z\rangle$ son las componentes del vector buscado. Las condiciones de perpendicularidad, en términos del producto punto, son:

$$\begin{cases} \langle x, y, z\rangle \cdot \langle 1, -1, 2\rangle = 0 \\ \langle x, y, z\rangle \cdot \langle -2, 3, 1\rangle = 0 \end{cases}$$

Es decir:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ -2x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

que es un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas. Vamos a resolverlo ordenadamente, siguiendo los siguientes pasos[2]:

1. Eliminamos una variable en una de las ecuaciones. Esto lo hacemos multiplicando, por ejemplo, a la primera ecuación por 2 y sumando ambas ecuaciones:

$$\begin{array}{rcl} 2x - 2y + 4z & = & 0 \\ & & + \\ \underline{-2x + 3y + z} & = & 0 \\ y + 5z & = & 0 \end{array}$$

2. Reemplazamos la segunda ecuación del sistema por esta última (en la que eliminamos la incógnita x). Nos queda el sistema:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ y + 5z = 0 \end{cases}$$

3. Usando la segunda ecuación podemos poner a y en función de z:

$$y = -5z$$

4. Hecho ésto, usamos la primera ecuación para escribir a x también en función de z:

$$x = y - 2z = -5z - 2z = -7z$$

5. De lo anterior concluimos que cualquier solución de nuestro problema debe tener la forma:

$$\langle -7z, -5z, z\rangle = z\,\langle -7, -5, 1\rangle \text{ donde } z \text{ es cualquier número } \neq 0$$

Por lo tanto, cualquier solución de nuestro sistema será un múltiplo del vector $\mathbf{r} = \langle -7, -5, 1\rangle$, esto es de la forma $t\mathbf{r} = t\,\langle -7, -5, 1\rangle$.

Comprueben directamente que un vector con la forma anterior es efectivamente perpendicular a los vectores dados.

El caso general lo enunciaremos en el siguiente Teorema. La demostración (que no haremos) sigue en líneas generales el procedimiento empleado en el ejemplo anterior.[3]

[2] Este método de resolución de un sistema lineal se llama de *eliminación gaussiana.*

[3] El tema de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales se verá con toda generalidad en Matemática C.

Teorema

Sean $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ dos vectores no paralelos en $\mathbf{R}^3$. Entonces las soluciones del sistema de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas

$$\begin{cases} \langle x,y,z\rangle \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \langle x,y,z\rangle \cdot \mathbf{w} = 0 \end{cases}$$

son de la forma $t\mathbf{r}$ donde $\mathbf{r}$ es un vector fijo no nulo y t es cualquier número real.

EJEMPLO

Maple permite obtener imágenes de vectores en el espacio mediante el comando `arrow` que se utiliza como en el siguiente ejemplo:

```
>with(plots):
>a1 := arrow(<0,0,1>, shape=harpoon):
>a2 := arrow(<0,1,0>, shape=arrow):
> a3 := arrow(<1,0,0>, shape=double_arrow):
> a4 := arrow(<1,1,1>, shape=cylindrical_arrow):
> display(a1, a2, a3, a4, scaling=CONSTRAINED, axes=FRAMED);
```

EJERCICIOS

En los casos siguientes encuentren un vector no nulo $\mathbf{r}$ que sea normal a los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$. Dibujen los tres vectores en todos los casos, usando Maple.

1. $\mathbf{v} = \langle 1,1,1\rangle$; $\mathbf{w} = \langle 1,1,0\rangle$
2. $\mathbf{v} = \langle 1,0,0\rangle$; $\mathbf{w} = \langle 0,1,0\rangle$
3. $\mathbf{v} = \langle 1,-1,0\rangle$; $\mathbf{w} = \langle 0,1,-1\rangle$
4. $\mathbf{v} = \langle 0,3,-1\rangle$; $\mathbf{w} = \langle -2,1,-2\rangle$
5. $\mathbf{v} = \langle 2,2,-1\rangle$; $\mathbf{w} = \langle 0,1,1\rangle$

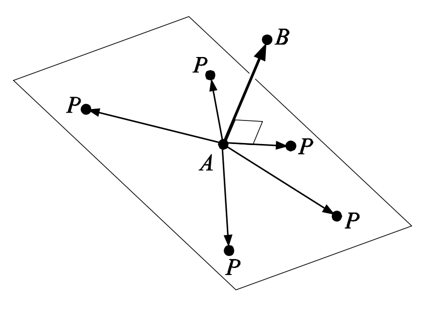
Ecuación de un plano en el espacio

ACTIVIDAD

1. Consideren el vector $\mathbf{v} = \langle -1,1,-3\rangle$. Describan por medio de una expresión al conjunto de los puntos $P(x,y,z)$ tales que $\overrightarrow{OP}$ es normal a $\mathbf{v}$. ¿Cómo se ve ese

conjunto en el espacio? ¿El origen $\overrightarrow{\mathbf{0}}$ pertence al conjunto?

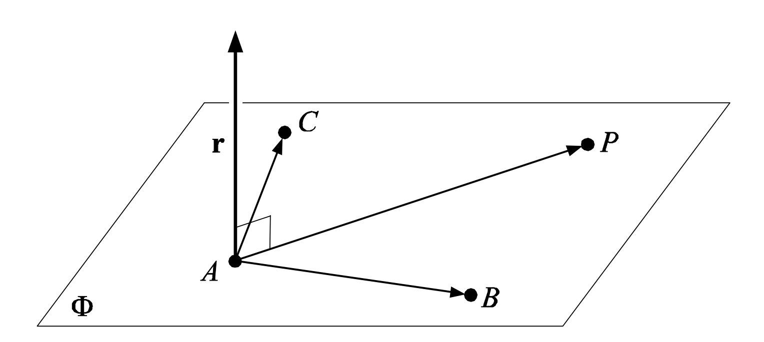
2. Consideremos ahora dos puntos, digamos $A\,(2,3,-5)$ y $B\,(0,1,2)$. Describan por medio de una expresión al conjunto de los puntos $P(x,y,z)$ tales que $\overrightarrow{AP}$ es normal a $\overrightarrow{AB}$ ¿Cómo se ve ese conjunto en el espacio? ¿El punto A pertenece al conjunto?



Los puntos P tales que $\overrightarrow{AP}$ es perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ forman un plano que pasa por A.

La actividad anterior nos hace suponer algo importante (y verdadero): el conjunto de todos los puntos P tales que el vector $\overrightarrow{AP}$ es normal a $\overrightarrow{AB}$ es un plano que pasa por el punto A.

Lo interesante es que todo plano en el espacio puede describirse de esta manera. En efecto, si Φ es un plano en el espacio, podremos encontrar en él tres puntos no alineados, digamos que son los puntos A, B y C. Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ no son, por lo tanto, colineales. De manera que basados en el Teorema de la página 159 podremos encontrar un vector $\mathbf{r}$ no nulo y normal a ambos. El plano Φ puede caracterizarse de la siguiente manera: un punto P pertenece a Φ si y solamente si el vector $\overrightarrow{AP}$ es perpendicular a $\mathbf{r}$:



La condición de perpendicularidad se expresa:

$$\mathbf{r}\cdot\overrightarrow{AP}=0$$

Escribamos lo anterior en componentes. Para ello supongamos que $P(x,y,z)$, A (a_1,a_2,a_3) y $\mathbf{r}=\langle r_1,r_2,r_3\rangle$. Entonces $\overrightarrow{AP}=\langle x-a_1,y-a_2,z-a_3\rangle$ y la ecuación queda:

$$r_1\,(x-a_1)+r_2\,(y-a_2)+r_3\,(z-a_3)=0$$

que se denomina **ecuación implícita** del plano Φ. También, distribuyendo y reagrupando, podemos escribirla así:

$$xr_1+yr_2+zr_3=a_1r_1+a_2r_2+a_3r_3$$

lo que, interpretado vectorialmente, no es más que:

$$\mathbf{r}\cdot\overrightarrow{OP}=\mathbf{r}\cdot\overrightarrow{OA}$$

Esta última forma hace evidente que puede conseguirse una ecuación implícita del plano conociendo un vector normal (en este caso $\mathbf{r}$) y un punto (en este caso A).

Resumiendo, hemos visto que un plano en el espacio puede describirse por medio de un vector normal no nulo y un punto en el plano. Y que esos datos permiten construir una ecuación implícita para el plano. Por ejemplo:

EJEMPLO

1. Dar la ecuación del plano perpendicular al vector $\mathbf{r} = \langle 2, 2, -1 \rangle$ que pasa por el punto $A\,(0, 1, -2)$. Según lo anterior, un punto $P\,(x, y, z)$ pertenece al plano si y solamente si:
$$\mathbf{r} \cdot \overrightarrow{OP} = \mathbf{r} \cdot \overrightarrow{OA}$$
que escrito en coordenadas es:
$$\begin{aligned} \langle 2, 2, -1 \rangle \cdot \langle x, y, z \rangle &= \langle 2, 2, -1 \rangle \cdot \langle 0, 1, -2 \rangle \\ 2x + 2y - z &= 4 \end{aligned}$$
Al revés, si tenemos la ecuación implícita del plano ¿Cómo describirlo por medio de un vector normal y un punto? Por ejemplo:

2. Sea el plano de ecuación:
$$x - 2y + 3z = 9$$
Un punto en el plano se consigue fácilmente, por ejemplo haciendo $x = 0$ e $y = 0$ resulta $z = 3$, con lo que obtenemos el punto $A(0, 0, 3)$. Ahora bien, para el vector $\mathbf{r} = \langle 1, -2, 3 \rangle$ (cuyas componentes son los coeficientes de la ecuación) y un punto $P(x, y, z)$ en el plano podemos escribir:
$$\begin{aligned} \langle 1, -2, 3 \rangle \cdot \langle x, y, z \rangle &= \langle 1, -2, 3 \rangle \cdot \langle 0, 0, 3 \rangle \\ \langle 1, -2, 3 \rangle \cdot \langle x, y, z \rangle - \langle 1, -2, 3 \rangle \cdot \langle 0, 0, 3 \rangle &= 0 \\ \langle 1, -2, 3 \rangle \cdot (\langle x, y, z \rangle - \langle 0, 0, 3 \rangle) &= 0 \\ \langle 1, -2, 3 \rangle \cdot \langle x, y, z - 3 \rangle &= 0 \end{aligned}$$
de donde resulta que:
$$\mathbf{r} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$$
Por último, dados tres puntos no alineados ¿Cómo se encuentra la ecuación del plano que los contiene? Por ejemplo:

3. Sean $A\,(1, 2, 3)\,, B\,(-1, 4, -5)$ y $C\,(2, 2, -1)$. Para determinar una ecuación del plano que contiene a los tres puntos, elegimos uno como origen, por ejemplo A, y consideramos los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$:
$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \langle -2, 2, -8 \rangle \\ \overrightarrow{AC} &= \langle 1, 0, -4 \rangle \end{aligned}$$
y buscamos un vector no nulo que sea normal a ambos. Para ello resolvemos el sistema (ver ejemplo de la página 157):
$$\begin{cases} -2x + 2y - 8z = 0 \\ x - 4z = 0 \end{cases}$$
$$\begin{aligned} x &= 4z \\ y &= \frac{2x + 8z}{2} = 8z \end{aligned}$$
Las soluciones son por lo tanto múltiplos del vector $\mathbf{v} = \langle 4, 8, 1 \rangle$ a quien tomare-

mos como normal al plano. La ecuación implícita será:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \overrightarrow{AP} &= 0 \\ \langle 4,8,1\rangle \cdot \langle x-1, y-2, z-3\rangle &= 0 \\ 4(x-1)+8(y-2)+(z-3) &= 0 \end{aligned}$$



EJERCICIOS

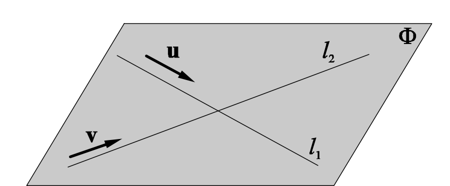


Figura 1

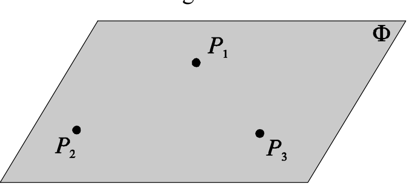


Figura 2

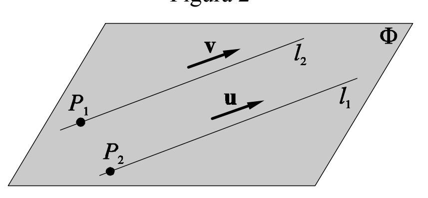


Figura 3

1. a. Es sabido, a partir de los postulados de la geometría del espacio, que dos rectas que se cortan, determinan un único plano. ¿Qué vector normal puede darse para el plano? ¿Qué punto puede elegirse como punto fijo? (ref.:Figura 1).

   b. También es sabido que tres puntos no alineados, determinan un único plano que los contiene. ¿Qué vector normal al plano puede darse? (ref.:Figura 2).

   c. Dos rectas paralelas también determinan un único plano que las contiene. ¿Cómo decide si dos rectas dadas son o no son paralelas? ¿Qué debe tener en cuenta como primera apreciación? Habiendo decidido el paralelismo ¿cómo puede obtener la dirección normal al plano que las contiene? (ref.:Figura 3).

2. a. Muestren que las rectas $L_1 : \begin{cases} x = 2t-1 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$ y $L_2 : \begin{cases} x = s+1 \\ y = \dfrac{s}{2}+1 \\ z = s-2 \end{cases}$ se cortan.

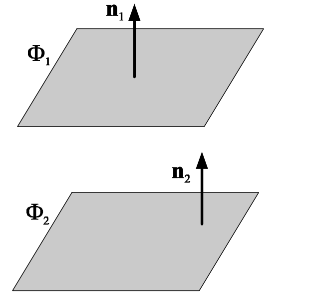
   b. Encuentren la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.

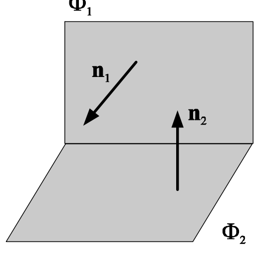
3. Encuentren la ecuación del plano que contiene a los puntos $(1,-1,0)$, $(1,2,3)$, $(4,0,1)$.

4. a. Muestren que las rectas $L_1 : \begin{cases} x = 5t-1 \\ y = -t \\ z = t+2 \end{cases}$ y $L_2 : \begin{cases} x = -10s+1 \\ y = 2s+1 \\ z = -2s-2 \end{cases}$ son paralelas.

   b. Encuentren la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.

5. ¿Qué condiciones pueden darse para decidir si dos planos son paralelos o perpendiculares? Interpreten gráficamente la posición de los vectores normales en el siguiente dibujo y decidan:





6. Φ_1 es el plano normal al vector $\langle 4, -1/2, 1/4\rangle$ que pasa por $A(0,0,3)$ y Φ_2 es el plano de ecuación $-16x + 2y - z = 6$

   a. ¿Es Φ_1 paralelo a Φ_2?

   b. El punto $(1, 2, -9)$ ¿pertenece a Φ_1? ¿y a Φ_2?

   c. Determinen tres puntos pertenecientes a cada plano.

7. Encuentren un plano perpendicular a $\Phi : x - y - 2z = 4$.

8. Encuentren un plano paralelo a la recta $L \begin{cases} x = t - 1 \\ y = -2t + 3 \\ z = 5t - 2 \end{cases}$

9. Consideren la recta L dirigida por el vector $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$ y que pasa por el punto $A(a_1, a_2, a_3)$.

   a. Escriban las ecuaciones paramétricas de L.

   b. Despejen el parámetro t en las tres ecuaciones (supongan que ninguna de las componentes de $\mathbf{v}$ es 0).

   c. Si igualamos quedan las ecuaciones:
   $$\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2} = \frac{z - a_3}{v_3}$$
   llamadas **ecuaciones simétricas** de la recta L. ¿Cuántas ecuaciones son realmente?

   d. Usando las ecuaciones simétricas puede verse a L como intersección de dos planos ¿Cuáles?

   e. Si por ejemplo $v_1 = 0$ ¿Qué ecuaciones propondrían para L?

   f. Encuentren las ecuaciones simétricas de todas las rectas del ejercicio 1 de la página 156.

10. En $\mathbf{R}^3$ dos planos distintos son paralelos o bien se cortan en una recta. Determinen cuál es el caso para los siguientes pares de planos:

    a. $x - z = 1; \quad y + z = 1$

    b. $x + 4y - 3z = 1; \quad 6x - 3y + 2z = 5$

    c. $6x - 3y + 12z = 24; \quad -8x + 4y - 16z = 5$

    d. En los casos en que los planos no sean paralelos, encuentren las ecuaciones paramétricas de la recta en que se cortan. En caso de cortarse, encuentren el ángulo formado por los dos planos.

11. Sean A y B dos puntos en el espacio. Muestren que el punto P tal que
    $$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$
    es el punto medio del segmento $\overline{AB}$.

12. Encuentren la ecuación del plano formado por todos los puntos cuya distancia al punto $(1, 1, 0)$ es igual a su distancia al punto $(0, 1, 1)$.

13. Encuentren las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $(0, 1, 2)$ es paralela al plano $x + y + z = 2$ y perpendicular a la recta $x = 1 + t, y = 1 - t, z = 2t$.

14. Determinen si la recta $x = t; y = 2t - 1; z = -t - 1$ corta al plano $\Phi : x - y - 2z = 4$.

6.4 Funciones a valores vectoriales

Curvas parametrizadas

Recordemos el recorrido que hicimos cuando definimos a las funciones circulares. En ese momento, nuestro propósito fue asignar a cada número real t un punto sobre la circunferencia unitaria, obtenido recorriendo un arco de longitud $|t|$ en sentido antihorario para t positivo, y en sentido horario para t negativo. En definitiva para un t dado pudimos describir las coordenadas del punto terminal como $(\cos t, \operatorname{sen} t)$. Pensándolo en términos de funciones, lo que hicimos fue definir una función que a cada número t le hizo corresponder un punto del plano, más precisamente un punto sobre la circunferencia unidad:

$$t \to (\cos t, \operatorname{sen} t)$$

Más aún, si pensamos al cambio en la variable independiente t como un cambio en el tiempo, los valores de la función anterior nos darán la posición del punto terminal, al que podemos imaginar como una partícula moviéndose sobre la circunferencia unitaria.

Definición

En general, una **curva parametrizada** en el plano es una función cuyo dominio es algún intervalo de la recta real, y sus valores son puntos en el plano. Esto es, una función de la forma:

$$t \to (x(t), y(t)) \quad \text{con } t \in I$$

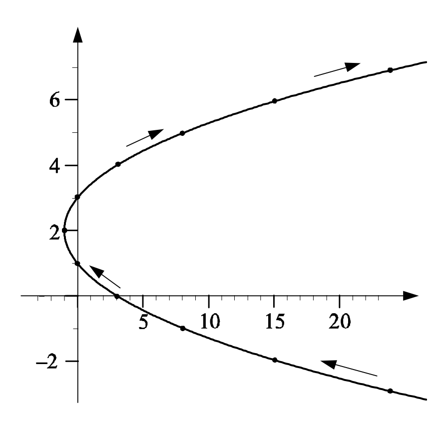
donde $x(t)$ e $y(t)$ son funciones numéricas definidas en el intervalo I.

Una curva parametrizada siempre se describe por las ecuaciones de sus coordenadas, y el dominio de las mismas:

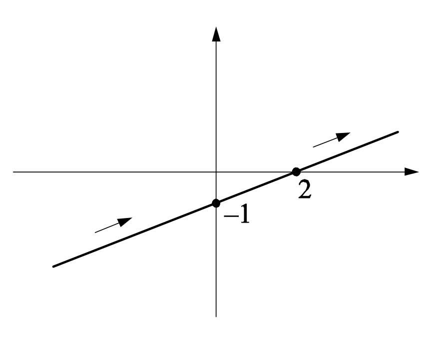
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in I$$

Veamos algunos ejemplos:

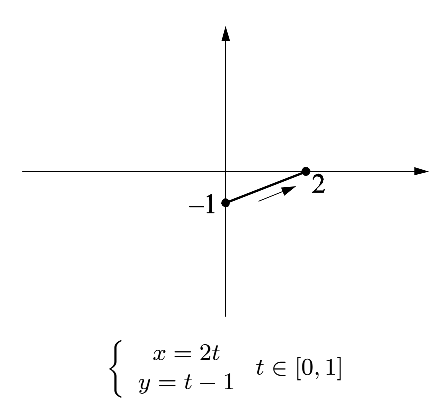
EJEMPLO



La gráfica de la curva $x = t^2 - 1$; $y = t + 2$. Las flechas indican el sentido creciente del parámetro t.



La imagen de la curva $x = 2t$; $y = t - 1$ es la recta $y = x/2 - 1$



$$\begin{cases} x = 2t \\ y = t - 1 \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

1. Las ecuaciones:
$$\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t + 2 \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}$$
describen una curva parametrizada. Su imagen es un subconjunto del plano; para saber qué forma tiene esa imagen podemos construir una tabla de valores y luego graficar en el plano los puntos obtenidos:

t	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$x(t)$	24	5	8	3	0	-1	0	3	8	15	24
$y(t)$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7

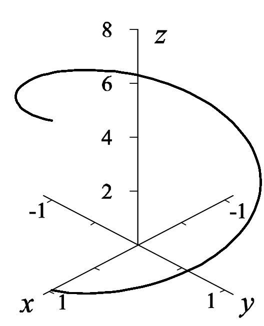
Si graficamos esos puntos en un sistema de ejes cartesianos obtenemos la figura del margen. Las flechas indican el sentido creciente del parámetro t.

2. Las ecuaciones:
$$\begin{cases} x = 2t \\ y = t - 1 \end{cases} \quad t \in \mathbf{R} \tag{3}$$
definen una curva parametrizada. Una forma de ver cuál es la imagen (esto es: el recorrido de la curva en el plano) es "eliminar el parámetro" en las ecuaciones. En este caso, despejando t en ambas ecuaciones e igualando:
$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} = t \\ y + 1 = t \end{cases}$$
$$\begin{aligned} \frac{x}{2} &= y + 1 \\ y &= \frac{x}{2} - 1 \end{aligned}$$
que es la ecuación de una recta. La $imagen$ de la curva parametrizada es entonces la recta de ecuación $y = \dfrac{x}{2} - 1$. Notemos además que cuando t cambia en forma creciente, el punto definido por la parametrización recorre la recta en el sentido indicado por las flechas.

3. Puede, en ciertos casos, interesarnos sólo una parte de una curva parametrizada. En general esa parte la obtendremos restringiendo el dominio de las funciones coordenadas de la curva. Por ejemplo si a las ecuaciones del ejemplo anterior las consideramos con dominio en el intervalo $[0, 1]$, es decir:
$$\begin{cases} x = 2t \\ y = t - 1 \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$
obtendremos como imagen el segmento que une al punto $(0, -1)$ con el $(2, 0)$.

Observación 1: No es bueno confundir una curva parametrizada (que es una función con variable real y valores en el plano o en el espacio) con su imagen (que es un subconjunto del plano). Si pensamos en la curva parametrizada como la posición de un partícula que se está moviendo, la imagen puede pensarse como *el recorrido o la trayectoria* de esa partícula, mientras que la curva parametrizada nos dice *cómo se mueve*. Distintas curvas parametrizadas pueden tener las mismas imágenes; esto simplemente nos está diciendo que la misma trayectoria puede recorrerse de maneras

diferentes. Como un ejemplo sencillo de lo dicho obtengan la imagen de las siguientes curvas: $C_1 : x(t) = t^2 - 1$; $y(t) = -t + 2$ y $C_2 : x(t) = 4t^2 - 1$; $y(t) = 2t + 2$. ¿Cómo se recorre esa imagen en cada caso? Comprueben que, además dicha imagen es la misma que la del Ejemplo 1 de la página 165.

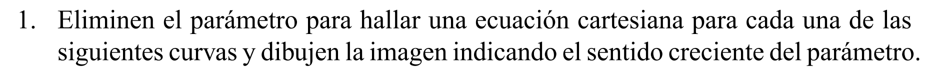


La helicoide $x(t) = \cos t$; $y(t) = \operatorname{sen} t$; $z(t) = t$

Observación 2: Si bien nuestros ejemplos se han referido a curvas en el plano, todo lo dicho vale para curvas en el espacio. Estas curvas están definidas por *tres* funciones coordenadas. Por ejemplo:

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \operatorname{sen} t \quad 0 \leq t \leq 2\pi \\ z(t) = t \end{cases}$$

es una curva parametrizada cuya imagen es un trozo de hélice (como un resorte estirado).




EJERCICIOS

1. Eliminen el parámetro para hallar una ecuación cartesiana para cada una de las siguientes curvas y dibujen la imagen indicando el sentido creciente del parámetro.
   a. $x = 2t + 4, y = t - 1$
   b. $x = 1 - 2t, y = t^2 + 4, 0 \leq t \leq 3$
   c. $x = \sqrt{t}, y = 1 - t$
   d. $x = \operatorname{sen} t, y = \cos t, 0 \leq t \leq \pi$
   e. $x = 2\cos t, y = \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} t, 0 \leq t \leq 2\pi$
   f. $x = \ln t, y = \sqrt{t}, 1 \leq t$
   g. $x = \cos t, y = \cos 2t$

2. Referidas a las curvas del ejercicio anterior verifiquen en cada caso si la trayectoria pasa por los siguientes puntos: $(2, 0)$; $(0, 1)$; $(-1, 1)$, justificando y encontrando, en caso afirmativo, el valor del parámetro correspondiente.

3. Describan el movimiento de una partícula en el plano cuya posición es (x, y) en los siguientes casos:
   a. $x = \cos \pi t, y = \operatorname{sen} \pi t, 1 \leq t \leq 2$
   b. $x = 2 + \cos t, y = 3 + \operatorname{sen} t, 0 \leq t \leq 2\pi$
   c. $x = 2\operatorname{sen} t, y = 3\cos t, 0 \leq t \leq 2\pi$

4. La ecuación cartesiana $\dfrac{x^2}{4^2} + \dfrac{y^2}{2^2} = 1$ define una elipse con centro en $(0, 0)$, eje mayor de longitud 8 y eje menor de longitud 4. Dibújenla. Obtengan una parametrización de la elipse, modificando las ecuaciones paramétricas de una circunferencia de manera conveniente.

5. Un partícula se mueve en el plano según las ecuaciones paramétricas $x = 3\operatorname{sen}(t)$; $y = 2\cos(t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Una segunda partícula se mueve según $x =$

$-3+\cos(t);\, y = 1+\operatorname{sen}(t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

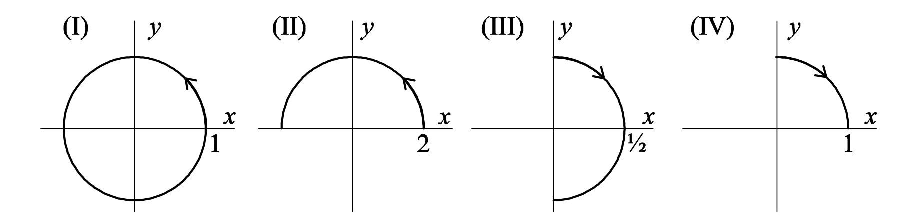
a. Grafiquen las trayectorias de ambas partículas. Según lo que muestra la gráfica ¿cuántos puntos de intersección tienen las trayectorias?

b. ¿Las partículas chocan en algún instante? En caso afirmativo, determinen los instantes y los puntos de colisión.

c. Repitan los incisos anteriores suponiendo que la segunda partícula tiene la trayectoria $x = 3+\cos(t);\, y = 1+\operatorname{sen}(t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

6. Hagan corresponder las ecuaciones paramétricas siguientes con las gráficas adecuadas; expliquen las razones de sus elecciones.

$$\begin{aligned}
\text{a. } x(t) &= \operatorname{sen}(\tfrac{t}{2}) \ ; \ y(t) = \cos(\tfrac{t}{2}) \quad 0 \le t \le \pi \\
\text{b. } x(t) &= \cos(2t) \ ; \ y(t) = \operatorname{sen}(2t) \quad 0 \le t \le \pi \\
\text{c. } x(t) &= 2\cos(t) \ ; \ y(t) = 2\operatorname{sen}(t) \quad 0 \le t \le \pi \\
\text{d. } x(t) &= \frac{1}{2}\operatorname{sen}(t) \ ; \ y(t) = \frac{1}{2}\cos(t) \quad 0 \le t \le \pi
\end{aligned}$$



7. Hallen las ecuaciones paramétricas para la trayectoria de una partícula que se mueve sobre la circunferencia $x^2 + (y-1)^2 = 4$, en cada uno de los siguientes casos:

a. Comenzando en $(2, 1)$, recorriendo la circunferencia una vez en el sentido horario.

b. Comenzando en $(2, 1)$ tres veces en el sentido antihorario.

c. Media vuelta en el sentido antihorario comenzando en $(0, 3)$.

8. En Maple las curvas paramétricas en el plano pueden graficarse con el comando plot, de la siguiente manera: `>plot([x(t),y(t),t=a..b])`. Úsenlo para graficar las siguientes curvas:

a. $x = t^3 - 2t, y = t^2 - t$

b. $x = t^3 - 1, y = 2 - t^3$

c. $x = \operatorname{sen} 3t, y = \operatorname{sen} 4t$

d. $x = t + \operatorname{sen} 2t, y = t + \operatorname{sen} 3t$

e. $x = \operatorname{sen}(t + t\operatorname{sen} t), y = \cos(t + \cos t)$

f. $x = \cos t, y = \operatorname{sen}(t + \operatorname{sen} 5t)$

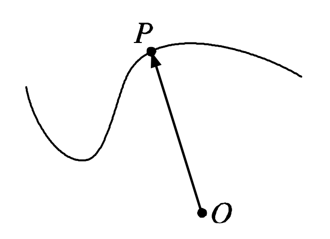
Movimiento en el espacio. Funciones a valores vectoriales

Avanzaremos ahora en el estudio del movimiento de una partícula en el espacio cuya posición está dada por las funciones coordenadas:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

Para cada valor del parámetro t definimos un vector $\mathbf{r}$ cuyas componentes son las coordenadas $x(t), y(t), z(t)$ al que llamaremos **vector de posición** de la curva parametrizada. Esto es:

$$\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$$



Para cada punto P sobre la curva, el vector de posición es $\overrightarrow{OP}$

Definición

En general, llamaremos **función vectorial** a una función cuyo dominio es un intervalo de la recta real y sus valores son vectores. Toda función vectorial está definida entonces por sus funciones componentes:

$$\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle \quad t \in I$$

Veamos ahora cómo estas ideas pueden sernos útiles en el estudio del movimiento.

Movimiento rectilíneo uniforme

Como un primer ejemplo consideremos dos puntos en el espacio $A\,(1, 0-3)$ y $B\,(2, -1, 6)$ y sea L la recta que pasa por esos puntos. Podemos escribir la ecuación vectorial de L:

$$\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA} \tag{4}$$

Para diferentes valores de t obtenemos diferentes puntos P sobre la recta.

ACTIVIDAD

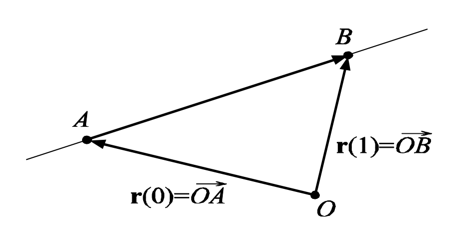
1. ¿Qué punto P sobre la recta se obtiene para $t = 0$? ¿Y para $t = 1$?

2. ¿Cómo harían para saber si el punto $C\,(1, 0, 1)$ está en la recta?

Pensemos ahora que una partícula se está moviendo sobre la recta L y supongamos que la ecuación (4) nos informa en qué punto de L se encuentra la partícula en el instante t. El vector de posición es:

$$\mathbf{r}(t) = t\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA}$$

De manera que, si $t = 0$ la partícula se encuentra en A y tendremos $\mathbf{r}(0) = \overrightarrow{OA}$ y si $t = 1$ la partícula se encuentra en B y tendremos $\mathbf{r}(1) = \overrightarrow{OB}$:



$\overrightarrow{AB}$ es el vector desplazamiento entre $t = 0$ y $t = 1$

El **desplazamiento** de la partícula entre $t = 0$ y $t = 1$ es claramente el vector $\overrightarrow{AB}$. Pero también podemos pensar que el desplazamiento es la diferencia entre los vectores de posición correspondientes a $t = 0$ y $t = 1$:

$$\text{desplazamiento} = \overrightarrow{\Delta \mathbf{r}} = \mathbf{r}(1) - \mathbf{r}(0) = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$$

¿Cuánto tardó la partícula en llegar desde A hasta B ? Una unidad de tiempo. Podemos decir, entonces que la velocidad media de la partícula entre $t = 0$ y $t = 1$ es igual al vector $\overrightarrow{AB}$.

Consideremos ahora dos instantes cualesquiera, digamos t_0 y t_1. La posición de la partícula en cada uno de ellos es:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t_0) &= t_0\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA} \\ \mathbf{r}(t_1) &= t_1\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA} \end{aligned}$$

Siguiendo la misma idea de antes, el desplazamiento entre los dos instantes será:

$$\mathbf{r}(t_1) - \mathbf{r}(t_0) = t_1\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA} - (t_0\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA}) = (t_1 - t_0)\overrightarrow{AB}$$

O sea que el desplazamiento entre dos instantes es, en este caso, el vector que se obtiene multiplicando al vector $\overrightarrow{AB}$ por el escalar $\Delta t = t_1 - t_0$. Si estamos interesados en la velocidad media, tenemos que "dividir" al vector desplazamiento por la longitud del intervalo de tiempo, esto es:

$$\textbf{velocidad media} = \frac{\overrightarrow{\Delta \mathbf{r}}}{\Delta t} = \frac{1}{t_1 - t_0}(t_1 - t_0)\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$$

Por lo tanto la velocidad media es independiente del intervalo de tiempo considerado.

Expresemos lo anterior teniendo en cuenta las coordenadas. Recordemos que A $(1, 0 - 3)$ y $B\,(2, -1, 6)$, y por lo tanto, $\overrightarrow{AB} = \langle 1, -1, 9\rangle$. Las ecuaciones paramétricas de L son:

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t \\ z = 9t - 3 \end{cases}$$

y ésas son precisamente las componentes del vector de posición:

$$\overrightarrow{OP} = \mathbf{r}(t) = \langle t + 1, -t, 9t - 3\rangle$$

ACTIVIDAD

El movimiento anterior es un ejemplo de **movimiento rectilíneo uniforme**. Es rectilíneo porque la trayectoria (es decir el conjunto de los puntos del espacio por los cuales la partícula pasa) es una recta. Y es uniforme porque el vector velocidad media es siempre el mismo, independientemente del intervalo de tiempo que se considere.

1. Muestren que si en un intervalo de tiempo $I = [t_0, t_1]$ una partícula se mueve de tal manera que su vector velocidad media es constante e igual al vector $\mathbf{v}$, entonces en ese intervalo de tiempo la función de posición es del tipo:

   $$\mathbf{r}(t) = (t - t_0)\mathbf{v} + \mathbf{r}(t_0)$$

   Esto nos dice que un movimiento a velocidad (vectorial) constante es necesariamente rectilíneo.

2. Cuando se deja caer un objeto en forma vertical ¿el movimiento del objeto es rectilíneo? ¿es uniforme? Relacione con el punto anterior.

3. Den un ejemplo de una función de posición de una partícula que se mueve en el espacio de manera que lo haga en forma rectilínea pero no uniforme.

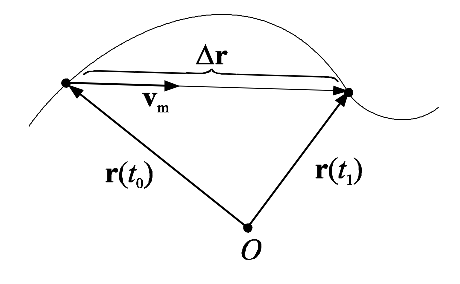
4. Una partícula se desplaza en el espacio con movimiento rectilíneo uniforme. En el instante $t = 2$ se encuentra en el punto $(-3, 0, 2)$ y en el instante $t = 5$ se encuentra en el punto $(5, 4, -2)$.
   a. Determine la función de posición de la partícula.
   b. ¿Choca la partícula con el plano de ecuación $x+y+z = 4$?¿en qué instante? ¿en qué punto?

La derivada de una función vectorial

Nos proponemos ahora obtener una definición de velocidad instantánea de una partícula que se mueve en el plano o en el espacio. Lo haremos, en forma similar a la que empleamos para funciones numéricas, a partir de la noción de velocidad media.

Supongamos que nuestra partícula tiene una función de posición dada por la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t)\rangle$$



El desplazamiento entre t_0 y t_1 es el vector $\overrightarrow{\Delta \mathbf{r}} = \mathbf{r}(t_1) - \mathbf{r}(t_0)$

El **desplazamiento** entre dos instantes t_0 y t_1 es el vector:

$$\overrightarrow{\Delta \mathbf{r}} = \mathbf{r}(t_1) - \mathbf{r}(t_0)$$

y la **velocidad media** entre t_0 y t_1 es el vector:

$$\mathbf{v}_m = \frac{\overrightarrow{\Delta \mathbf{r}}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}(t_1) - \mathbf{r}(t_0)}{t_1 - t_0}$$

Notemos que el vector velocidad media y el vector desplazamiento son colineales.

¿Cómo hacer para obtener la velocidad instantánea en, por ejemplo, t_0 ? Si tomamos un incremento h (que pensamos pequeño) podemos obtener la velocidad media entre t_0 y $t_0 + h$:

$$\mathbf{v}_m = \frac{\overrightarrow{\Delta \mathbf{r}}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}(t_0 + h) - \mathbf{r}(t_0)}{h}$$

para luego pasar al límite cuando el incremento h tiende a 0:

$$\mathbf{v}(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{r}(t_0 + h) - \mathbf{r}(t_0)}{h}$$

Veamos ahora cómo interpretar el límite del miembro derecho. Si miramos nuevamente la definición de velocidad media vemos que allí se realizan dos operaciones: una diferencia de vectores y una multiplicación del vector diferencia por un número.

Ambas operaciones se llevan a cabo componente a componente. Explícitamente:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_m &= \frac{\overrightarrow{\Delta \mathbf{r}}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}(t_0+h)-\mathbf{r}(t_0)}{h} = \\ &= \left\langle \frac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h}, \frac{y(t_0+h)-y(t_0)}{h}, \frac{z(t_0+h)-z(t_0)}{h} \right\rangle \end{aligned}$$

tiene sentido entonces interpretar el límite componente a componente:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{r}(t_0+h)-\mathbf{r}(t_0)}{h} = \\ &= \left\langle \lim_{h\to 0} \frac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h}, \lim_{h\to 0} \frac{y(t_0+h)-y(t_0)}{h}, \lim_{h\to 0} \frac{z(t_0+h)-z(t_0)}{h} \right\rangle \end{aligned}$$

Y si las funciones numéricas $x(t), y(t)$ y $z(t)$ son derivables en t_0 tendremos:

$$\mathbf{v}(t_0) = \langle x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0) \rangle$$

Observen que las componentes del vector velocidad son las derivadas de las funciones componentes del vector de posición.

Definición

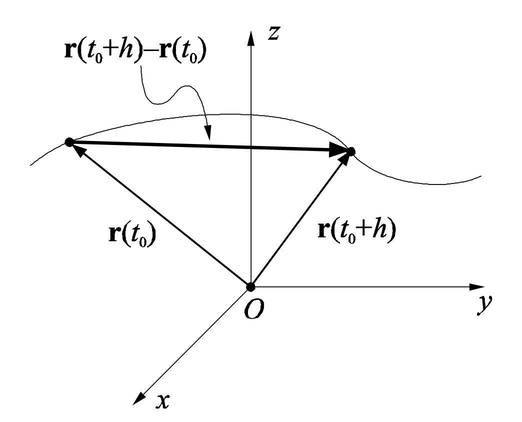
Para una función vectorial cualquiera $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$ se define su **derivada** como el vector:

$$\mathbf{r}'(t) = \langle x'(t), y'(t), z'(t) \rangle$$

siempre que las componentes sean funciones derivables.

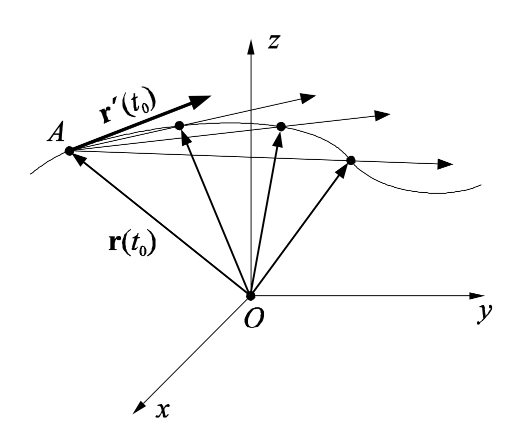
Interpretación geométrica

Recordemos que si A y B son puntos del plano, entonces $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$. Esto nos permite interpretar el vector desplazamiento como el vector diferencia entre las posiciones. Supongamos como en la sección anterior, que $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$ es una función vectorial y que consideramos un instante t_0 y un incremento h. Tenemos la siguiente interpretación gráfica del desplazamiento entre t_0 y $t_0 + h$:



cuando dividimos por el incremento h al desplazamiento, obtenemos un vector colineal con el anterior:

Por último, cuando el incremento h tiende a 0, el punto B se aproxima al punto A mientras que el vector velocidad media tiende al vector velocidad, que resulta tangente a la trayectoria en el punto A:



La derivada de una función vectorial $\mathbf{r}(t)$ es un vector tangente a la trayectoria definida por las componentes de $\mathbf{r}(t)$, siempre que $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$.

Si para un valor t_0 se verifica que $\mathbf{r}'(t_0) \neq \mathbf{0}$ entonces la recta dirigida por $\mathbf{r}'(t_0)$ es tangente a la curva por el punto $\mathbf{r}(t_0)$. La ecuación vectorial de tal recta será:

$$\overrightarrow{OP} = t\,\mathbf{r}'(t_0) + \mathbf{r}(t_0)$$

EJEMPLO

Encontrar ecuaciones paramétricas para la recta tangente al helicoide $x = \cos t$; $y = \operatorname{sen} t$; $z = t$ por el punto $(0, -1, 3\pi/2)$.

Como tenemos un punto sobre la recta, lo que necesitamos es un vector que determine la dirección de la misma; esto es, un vector tangente. Si consideramos la función vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \operatorname{sen} t, t\rangle$ su derivada $\mathbf{r}'(t) = \langle -\operatorname{sen} t, \cos t, 1\rangle$ nos provee de un vector tangente por el punto de coordenadas $(\cos t, \operatorname{sen} t, t)$.

Notando que para $t = 3\pi/2$ estamos en el punto requerido de la trayectoria, un vector

tangente en el mismo será:

.

$$\mathbf{r}'(3\pi/2) = \langle -\operatorname{sen} 3\pi/2, \cos 3\pi/2, 1\rangle = \langle 1, 0, 1\rangle$$

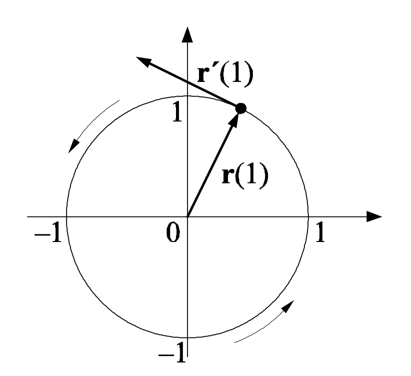
Las ecuaciones paramétricas para la recta tangente serán:

$$\begin{cases} x = t \\ y = -1 \\ z = t + 3\pi/2 \end{cases}$$

EJEMPLO

Hemos visto en la sección "Funciones circulares" que las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases}$$



Los vectores de posición y velocidad para $t = 1$

describen el movimiento de una partícula que se mueve sobre la circunferencia unitaria en sentido antihorario. La función de posición asociada es, naturalmente:

$$\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \operatorname{sen} t\rangle$$

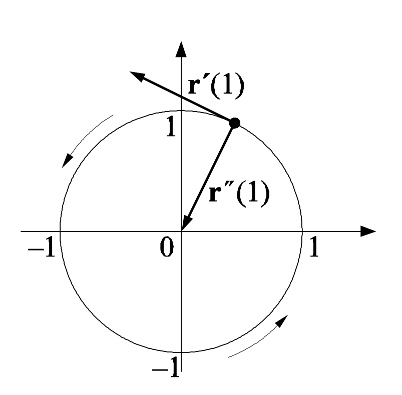
Por lo tanto, el vector velocidad será:

$$\mathbf{r}'(t) = \langle -\operatorname{sen} t, \cos t\rangle$$

Por ejemplo en el dibujo del margen se representan, para $t = 1$, el vector de posición y el vector velocidad.

Lo que muestra el dibujo es que recorriendo la circunferencia de esta manera, el vector de posición y el vector velocidad son ortogonales. Además esto es así en cualquier otro punto. Para verlo, calculemos el producto punto entre ambos vectores:

$$\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = \langle \cos t, \operatorname{sen} t\rangle \cdot \langle -\operatorname{sen} t, \cos t\rangle = -\cos t \operatorname{sen} t + \operatorname{sen} t \cos t = 0$$



El vector aceleración $\mathbf{r}''(1)$ apunta al centro de la circunferencia

El vector derivada del vector velocidad es la **aceleración** de la partícula. En nuestro caso:

$$\mathbf{r}''(t) = \langle -\cos t, -\operatorname{sen} t\rangle$$

que es el opuesto al vector de posición. Dibujado con origen en el punto correspondiente de la curva, apunta al centro de la circunferencia.

La **rapidez**, tal como ya hemos dicho, es el módulo del vector velocidad. En nuestro caso:

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{(-\operatorname{sen} t)^2 + (\cos t)^2} = 1$$

.

EJERCICIOS

Consideren las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 5\cos 2t \\ y = 5\,\text{sen}\, 2t \end{cases}$$

1. ¿Qué tipo de movimiento describen en el plano?
2. ¿Cuál es la función de posición?
3. Calculen la velocidad y la aceleración.
4. ¿Son ortogonales la posición y la velocidad? ¿La aceleración apunta hacia el centro de la circunferencia? ¿Cómo dependen ambas del coeficiente 5? ¿Y del 2?

Resumen

- Una **función vectorial** es una función que a cada número real de su dominio le asocia un vector (del plano o del espacio)
- Las funciones componentes de una función vectorial pueden verse como las funciones coordenadas de una curva parametrizada. De la misma forma dada una curva parametrizada sus coordenadas dan origen a una función vectorial.
- La "mirada vectorial" es adecuada para estudiar el movimiento de un objeto en el plano o en el espacio.
- Una función vectorial $\mathbf{r}(t)$ puede derivarse componente a componente; al hacerlo se obtiene una nueva función vectorial $\mathbf{r}'(t)$. Este último vector -si es diferente de $\mathbf{0}$- es tangente a la curva que es imagen de $\mathbf{r}(t)$, para cada valor de t.
- Si pensamos en una función vectorial $\mathbf{r}(t)$ como el vector de posición de una partícula que se mueve en el plano o en el espacio, $\mathbf{r}'(t)$ es la velocidad de la partícula en el instante t. La derivada segunda $\mathbf{r}''(t)$ se interpreta como la aceleración de la partícula en el instante t.

Observación: La *notación de Leibniz* para la derivada de una función de una variable es la siguiente:

$$f'(t) = \frac{df}{dt}$$

que se lee "derivada de efe respecto de te". La notación de Leibniz es adecuada en muchos casos, evitando el uso de paréntesis y tildes. También queda claro cuál es la variable que estamos considerando para derivar, cuestión útil cuando nuestra expresión incluye algún parámetro, por ejemplo:

$$\frac{d\left(xt^2\right)}{dt} = 2xt$$

mientras que:

$$\frac{d\left(xt^2\right)}{dx} = t^2$$

También usaremos la notación de Leibniz para la derivada de una función vectorial, de manera que:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}'(t)$$

Propiedades de la derivada de una función vectorial

Las siguientes propiedades de la derivación de funciones vectoriales, se deducen con un poco de trabajo a partir de las propiedades análogas de la derivada de funciones de una variable usadas componente a componente.

Sean $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{s}(t)$ funciones vectoriales derivables, α un número real y $f(t)$ una función numérica derivable. Entonces:

1. $\frac{d(\mathbf{r}(t)+\mathbf{s}(t))}{dt} = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} + \frac{d\mathbf{s}(t)}{dt}$
2. $\frac{d\alpha\mathbf{r}(t)}{dt} = \alpha\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$
3. $\frac{d\left[f(t)\mathbf{r}(t)\right]}{dt} = \frac{df(t)}{dt}\mathbf{r}(t) + f(t)\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$
4. $\frac{d\left[\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{s}(t)\right]}{dt} = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}\cdot\mathbf{s}(t) + \mathbf{r}(t)\cdot\frac{d\mathbf{s}(t)}{dt}$ ¡notablemente similar a la derivada de un producto!

EJERCICIOS

1. Encuentren los valores de las funciones vectoriales siguientes, para los valores del parámetro que se indican:
   a. $\mathbf{r}(t) = \left\langle 3t, t^2, 2t-1\right\rangle ; t=0, t=1, t=2$
   b. $\mathbf{r}(t) = 2t\,\mathbf{i}+e^t\,\mathbf{j}-3\mathbf{k}\ ;\ t=1\ ;\ t=-1\ ;\ t=0$
2. Grafiquen las curvas que definen las siguientes funciones vectoriales. Para los valores indicados del parámetro, calculen y grafiquen los vectores de posición y tangente y represéntenlos en el dibujo:
   a. $\mathbf{r}(t) = \left\langle t, t^2-1\right\rangle\ ;\ t=0, t=1, t=2$
   b. $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, t, \operatorname{sen} t\rangle\ ;\ t=0, t=\pi/2, t=\pi$
   c. $\mathbf{r}(t) = \left\langle t, t, t^2-1\right\rangle ;\ t=0, t=1, t=2$
3. Dada la curva parametrizada $x(t) = t\,; y(t) = 2t - t^2, t \in \mathbf{R}$
   a. Encuentren la ecuación cartesiana de la trayectoria.
   b. Grafiquen la curva parametrizada. Indiquen el sentido de recorrido de la misma, expliquen cómo lo deducen.
   c. Encuentren ecuaciones paramétricas para la recta tangente a la curva por el punto $(2, 0)$, interpreten gráficamente.
   d. ¿Hay algún valor de t para el cual el vector velocidad sea horizontal? ¿Y vertical?

e. ¿Pueden dar otra curva parametrizada que origine la misma trayectoria?

4. Encuentren los valores de t tales que los vectores $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{r}'(t)$ sean ortogonales. Interprete gráficamente.

   a. $\mathbf{r}(t) = \langle 2\cos t, \operatorname{sen} t \rangle$

   b. $\mathbf{r}(t) = \left\langle t, t^2 - 1 \right\rangle$

5. Hallen los valores de t de manera que el vector $\mathbf{r}'(t)$ sea paralelo al pano $z = 0$, en los siguientes casos:

   a. $\mathbf{r}(t) = \left\langle t, t, t^3 - 1 \right\rangle$

   b. $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} 2t \rangle$

6. Supongan que $\mathbf{r}(t)$es una función vectorial derivable en todo su dominio. Muestren que $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{r}'(t)$ son ortogonales si y solamente si $|\mathbf{r}(t)|$ es constante. Sugerencia usen que: $|\mathbf{r}(t)|\ ^2 = \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t)$ y deriven esta última expresión usando la propiedad 4 de la derivación.

Capítulo 7
Funciones de varias variables

En este capítulo trataremos con funciones que dependen de más de una variable. Para ello debemos familiarizarnos con algunos subconjuntos especiales del plano y del espacio.

Una ecuación con dos incógnitas del tipo $F(x,y) = 0$ define, en general, una curva en el plano. La ecuación anterior se dice la **ecuación implícita** de la curva.

EJEMPLO

1. La ecuación $x^2 + y^2 - 1 = 0$ define una circunferencia de radio 1 centrada en el origen.
2. La ecuación $y - x^2 = 0$ define una parábola con vértice en $(0,0)$.
3. Si $f(x)$ es una función numérica, la ecuación $y - f(x) = 0$ define a la gráfica de $f(x)$.
4. La ecuación $x^2 + y^2 = 0$ no define una curva puesto que sus soluciones se reducen a un único punto: $(0,0)$.

Algunas veces es complicado dibujar una curva en el plano. Es de gran ayuda disponer de un programa de computadora que permita graficar estos objetos; por ejemplo con Maple para graficar una curva definida implícitamente por $F(x,y) = 0$ se usan los comandos:

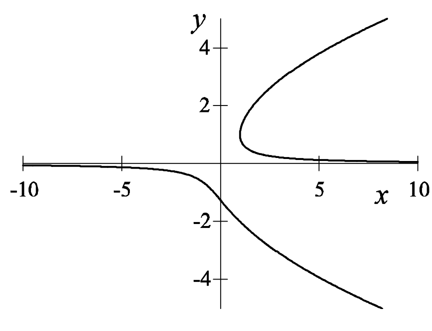
$>$ `with(plots);` (carga el paquete plots)

$>$ `implicitplot(F(x,y)=0,x=a..b,y=c..d);` (dibuja la curva en el rango dado).

EJEMPLO

Grafiquemos usando Maple la curva definida por $3xy - y^3 = 2$

```
>with(plots):
> implicitplot(3*x*y-y^3=2,x=-10..10,y=-6..6);
```



La curva $3xy - y^3 = 2$ graficada con Maple.

7.1 Secciones cónicas

Las llamadas secciones cónicas, o simplemente cónicas, son ciertas curvas particulares cuyas propiedades son conocidas desde la antigüedad clásica. Se trata de la parábola, la elipse y la hipérbola. Daremos una descripción esquemática de sus ecuaciones y de sus principales elementos.

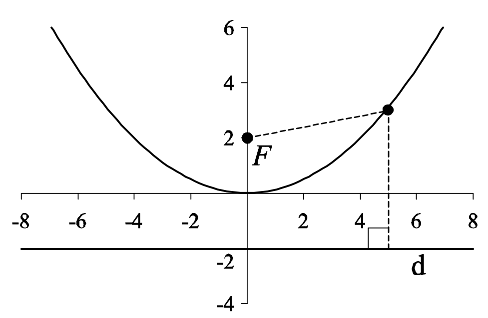
Parábola

Es la curva formada por todos los puntos del plano que están a igual distancia de una recta d dada (llamada **directriz**) y de un punto F dado (llamado **foco**).

Puede mostrarse que la ecuación de una curva es de la forma $x^2 = 4py$ si y solamente si es una parábola con vértice en el origen, con foco en $(0, p)$ y directriz $y = -p$.

EJEMPLO

La siguiente gráfica es la de una parábola, y se señalan su foco y su directriz. Encuentre su ecuación.



En este caso se tiene $p = 2$, y por lo tanto la ecuación es $x^2 = 8y$.

EJERCICIOS

1. Muestren que un punto $P(x, y)$ satisface la ecuación $x^2 = 4py$ entonces la distancia desde P hasta el punto $(0, p)$ es igual a la distancia desde P hasta la recta $y = -p$.

2. ¿Qué ecuación tendrá una parábola cuyo vértice está en $(0, 0)$ y su foco está en $(p, 0)$?

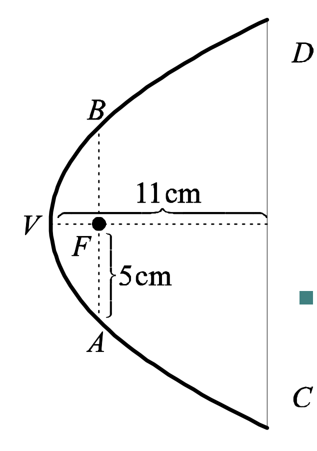
3. En los siguientes casos, localicen el vértice y el foco. Deduzcan la ecuación de la directriz y grafiquen la parábola:

   a. $x = 2y^2$

b. $4x^2 = -y$

c. $4y + x^2 = 0$

d. $x - 1 = (y + 5)^2$



4. La figura del margen representa un reflector parabólico. La lámpara se coloca en el foco, donde la cuerda AB mide 10 cm. Deduzcan una ecuación para la parábola y calculen el diámetro de la abertura CD.

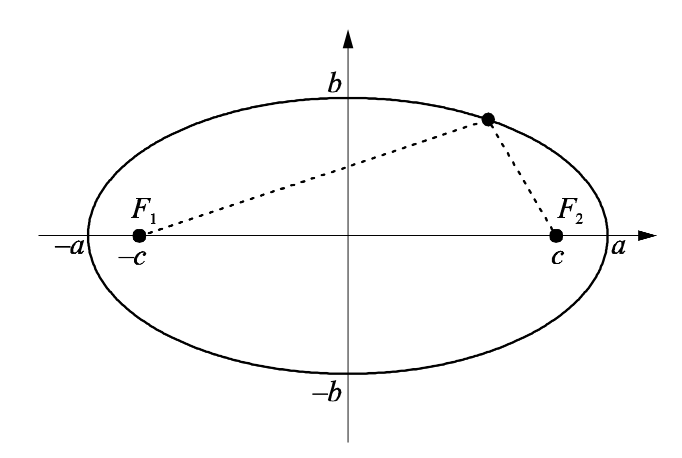
Elipse

Es la curva formada por el conjunto de puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos F_1 y F_2 dados (llamados **focos**) es constante.

Una elipse con focos sobre el eje x, situados en los puntos de coordenadas $(-c, 0)$ y $(c, 0)$ tiene una ecuación de la forma:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{con } 0 < b \leq a$$

En este caso, las intersecciones con el eje x se llaman **vértices**, y se sitúan en los puntos $(-a, 0)$ y $(a, 0)$. El segmento que une esos puntos se llama eje mayor. Las intersecciones con el eje y son los puntos $(0, -b)$ y $(0, b)$.



EJERCICIOS

1. Muestren que la elipse definida por la ecuación $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ es simétrica respecto de ambos ejes coordenados.

2. Muestren que $a^2 - b^2 = c^2$. Para hacerlo muestren primero que la distancia entre los puntos $(0, b)$ y $(c, 0)$ es igual a a.

3. Muestren que la curva de ecuación $9x^2 + 16y^2 = 144$ es una elipse. Grafíquenla y determinen sus focos.

4. ¿Cómo es la elipse cuando $a = b$?

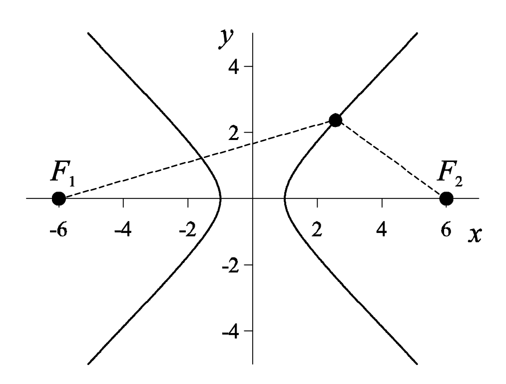
5. ¿Cómo es la curva de ecuación $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ cuando $a < b$? ¿Cuáles son los focos?

6. Determinen los focos y vértices de las siguientes elipses. Bosquejen sus gráficas

   a. $x^2/16 + y^2/4 = 1$ b. $9x^2 - 18x + 4y^2 = 27$ c. $4x^2 + 25y^2 = 25$

Hipérbola

Es la curva formada por el conjunto de puntos cuyas diferencias de distancias a dos puntos fijos (llamados **focos**) son constantes.



Cuando los focos se sitúan sobre el eje x en los puntos $(-c, 0)$ y $(c, 0)$, la hipérbola tiene una ecuación de la forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde $a^2 + b^2 = c^2$. En este caso, las intersecciones con el eje x, llamadas **vértices**, nuevamente se encuentran en $(-a, 0)$ y $(a, 0)$.

Para graficar una hipérbola, es conveniente graficar en primer lugar sus asíntotas, que son las rectas:

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$$

EJERCICIOS

1. Determinen los focos y las asíntotas de la hipérbola $9x^2 - 16y^2 = 144$

2. ¿Cuál sería la ecuación de una hipérbola cuyos vértices están sobre el eje y?

3. Localicen los focos y deduzcan la ecuación de la hipérbola cuyos vértices están en $(0, \pm 1)$ y tiene una asíntota de ecuación $y = 2x$.

7.2 Superficies en el espacio

Una ecuación del tipo $F(x, y, z) = 0$ define, en general, una superficie en el espacio tridimensional. La ecuación anterior se llama **ecuación implícita** de la superficie.

EJEMPLO

1. La ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ define una esfera de centro en $(0, 0, 0)$ y radio 1.
2. La ecuación $x = 0$ define el plano yz.
3. En general una ecuación lineal en tres variables de la forma $ax + by + cz = d$ donde a, b, c y d son números cualesquiera define un plano en el espacio cuando al menos uno de los coeficientes a, b, c es no nulo.

Para graficar una superficie dada por una ecuación implícita $F(x, y, z) = 0$ con Maple, usamos los comandos:

$>$ `with(plots);` (carga el paquete plots)

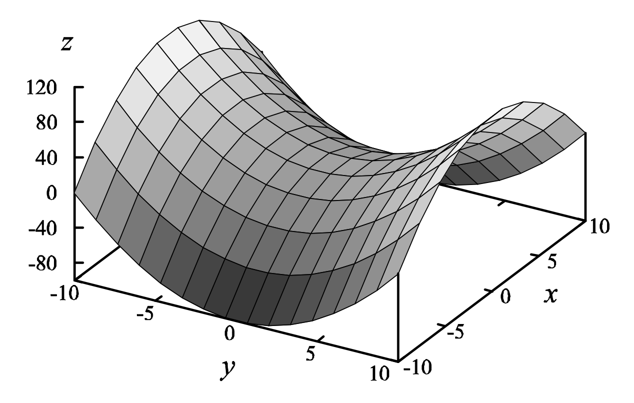
$>$ `implicitplot3d(F(x,y,z)=0,x=a..b,y=c..d,z=e..f);` (dibuja la superficie en el rango dado).

EJEMPLO

Grafiquemos con Maple la superficie definida por la ecuación

$$z = y^2 - x^2$$

```
> with(plots):
> implicitplot3d(z=y^2-x^2,x=-10..10,y=-10..10,z=-90..120);
```

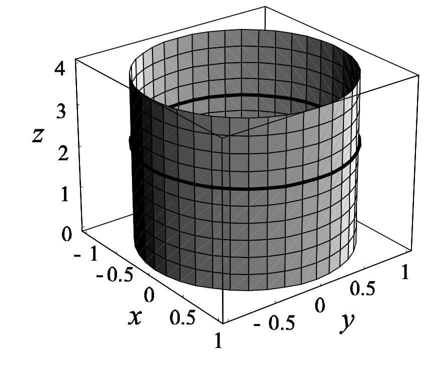


Cilindros

Un ejemplo sencillo de una clase de superficies en el espacio es el de las **superficies cilíndricas** o **cilindros**. Están definidos, en general, por una ecuación implícita en la que una de las variables no interviene. Veamos algunos ejemplos.



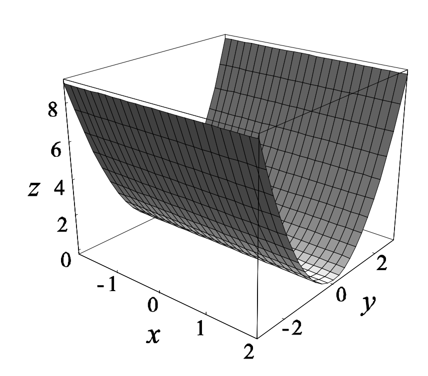
EJEMPLO



El cilindro $x^2 + y^2 = 1$

1. La superficie en el espacio definida por la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ se compone de todos los puntos (x, y, z) tales que (x, y) pertenece a la circunferencia de radio 1 en el plano xy, y la coordenada z es cualquier número. Vemos su gráfica al margen.

2. La ecuación $z - y^2 = 0$ define en el espacio una superficie cilíndrica que se compone de todos los puntos (x, y, z) tales que (y, z) pertenece a la parábola $z - y^2 = 0$ en el plano yz, y la coordenada x es cualquier número. Vemos su gráfica al margen.



El cilindro $z - y^2 = 0$

Podemos ver a una superficie cilíndrica como formada por todas las rectas paralelas a una recta dada que pasan por una curva plana dada.

EJERCICIOS

Describan las siguientes superficies y hagan una gráfica:

1. $y^2 + z^2 = 9$
2. $x - y^2 = 0$
3. $z = 4 - x^2$
4. $x^2 - y^2 = 1$

Superficies cuadráticas

Se denomina superficie cuadrática a cualquier superficie en el espacio definida por una ecuación de segundo grado en las variables x, y, z. La forma general de tal ecuación es:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

donde $A, B, C, D, E, G, H, I, J$ son constantes. Por medio de traslaciones y rotaciones, toda ecuación del tipo anterior puede llevarse a una de las dos formas siguientes:

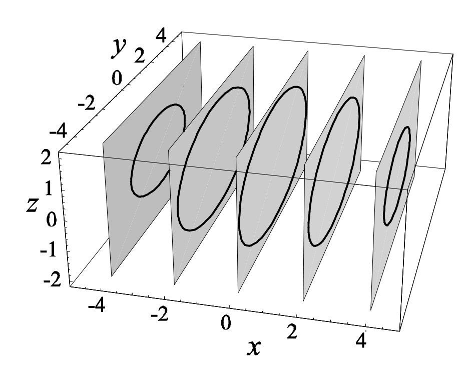
$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + J = 0 \qquad \text{ó} \qquad Ax^2 + By^2 + Iz = 0$$

Para tener idea de qué tipo de gráfica define una ecuación implícita dada muchas

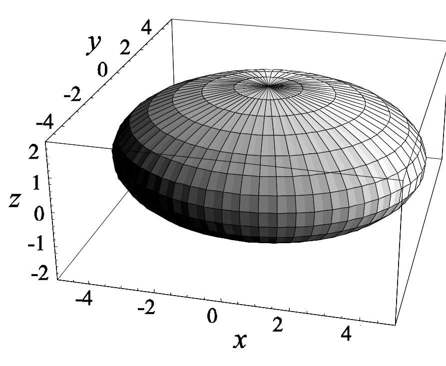
veces es útil considerar **las trazas**, que son las curvas planas que se obtienen de la intersección de la superficie con los planos paralelos a los planos coordenados. Esto es, si la superficie está definida por una ecuación implícita $F(x, y, z) = 0$ las trazas serán de tres tipos:

- Las trazas paralelas al plano yz son las curvas definidas por:
$$\begin{cases} x = k \\ F(k, y, z) = 0 \end{cases} \quad \text{para los distintos valores de la constante } k.$$
- Las trazas paralelas al plano xz son las curvas definidas por:
$$\begin{cases} y = k \\ F(x, k, z) = 0 \end{cases} \quad \text{para los distintos valores de la constante } k.$$
- Las trazas paralelas al plano xy son las curvas definidas por:
$$\begin{cases} z = k \\ F(x, y, k) = 0 \end{cases} \quad \text{para los distintos valores de la constante } k.$$

EJEMPLO



Las trazas de $x^2/25 + y^2/16 + z^2/4 = 1$ paralelas al plano yz



El elipsoide $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} + \dfrac{z^2}{4} = 1$

1. Identifiquemos mediante sus trazas a la superficie cuadrática $x^2/25 + y^2/16 + z^2/4 = 1$.

   Trazas paralelas al plano yz: consideramos un valor constante k. Las trazas serán:
$$\begin{cases} x = k \\ k^2/25 + y^2/16 + z^2/4 = 1 \end{cases}$$
   La segunda ecuación es:
$$y^2/16 + z^2/4 = 1 - k^2/25$$
   Cuando $1 - k^2/25 > 0$ la ecuación anterior define una elipse en el plano $x = k$. Esto sucede cuando $k^2 < 25$ o sea cuando $|k| < 5$.

   Cuando $1-k^2/25 = 0$, esto es cuando $k = \pm 5$ la ecuación queda $y^2/16+z^2/4 = 0$ y las trazas se reducen a los puntos $(5, 0, 0)$ y $(-5, 0, 0)$ respectivamente.

   Por último las trazas para $1 - k^2/25 < 0$ son vacías.

   Un análisis totalmente similar arroja que las trazas paralelas a los planos xz ($y = k$) y xy ($z = k$) son, respectivamente:
$$\frac{x^2}{25} + \frac{z^2}{4} = 1 - \frac{k^2}{16} \begin{cases} \text{elipse en el plano } y = k \text{ cuando } |k| < 4 \\ \text{los puntos } (0, 4, 0) \text{ y } (0, -4, 0) \text{ cuando } y = \pm 4 \\ \text{vacías cuando } |k| > 4 \end{cases}$$
$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 - \frac{k^2}{4} \begin{cases} \text{elipse en el plano } y = k \text{ cuando } |k| < 2 \\ \text{los puntos } (0, 0, 2) \text{ y } (0, 0, -2) \text{ cuando } y = \pm 2 \\ \text{vacías cuando } |k| > 2 \end{cases}$$
   Nuestra superficie resulta en un elipsoide, que graficamos al margen.

2. Identifiquemos mediante sus trazas a la superficie cuadrática $z = 9x^2 + 4y^2$

Si hacemos $x = k$ nuestra ecuación queda:

$$z = 9k^2 + 4y^2$$

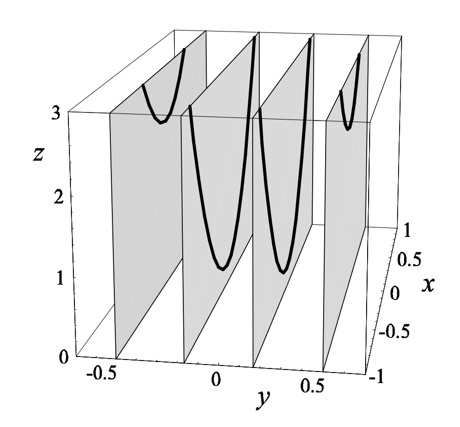
que es una familia de parábolas en los planos $x = k$ (ver figura al margen).

Las trazas para $y = k$ también son parábolas. Para $z = k$, la ecuación queda:

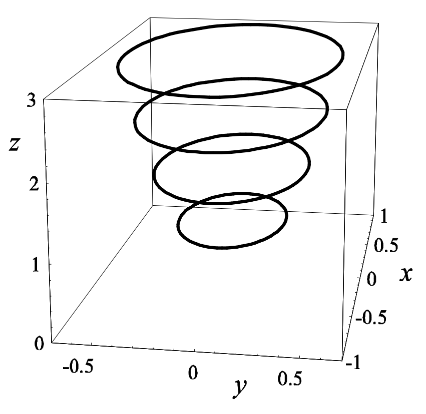
$$k = 9x^2 + 4y^2$$

que define elipses para $k > 0$ (ver al margen).

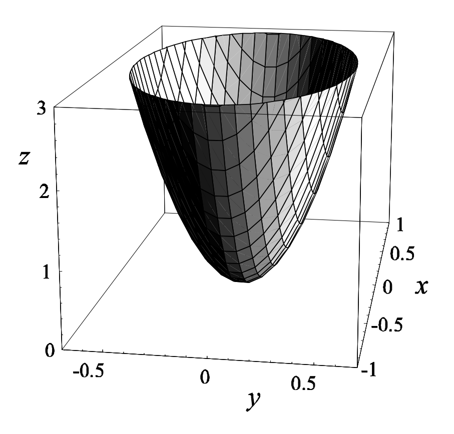
Nuestra superficie es el llamado paraboloide elíptico:



Las trazas paralelas al plano yz



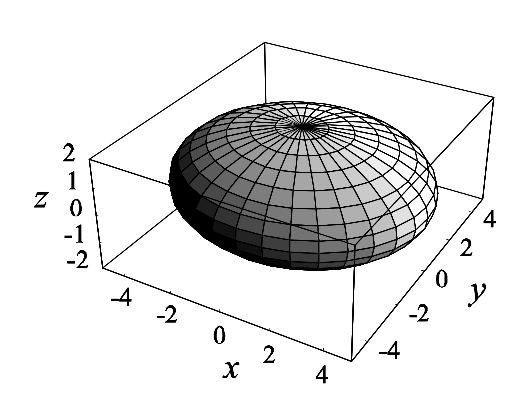
Las trazas paralelas al plano xy



A continuación se muestran las diferentes superficies cuadráticas. Se ha elegido al eje z de manera que las superficies resulten simétricas respecto de él. Cuando la superficie sea simétrica respecto de otro eje, la ecuación cambia en consecuencia.

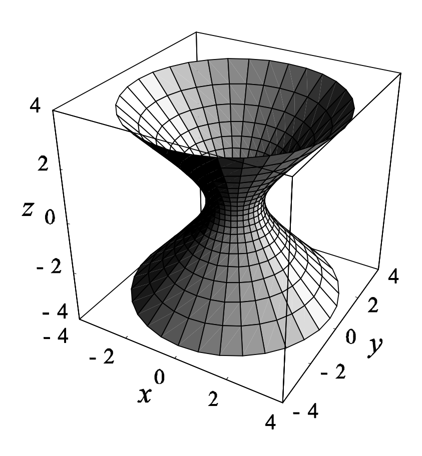
Elipsoide: $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Todas las trazas significativas son elipses. Cuando $a = b = c$ se trata de una esfera de radio $|a|$.



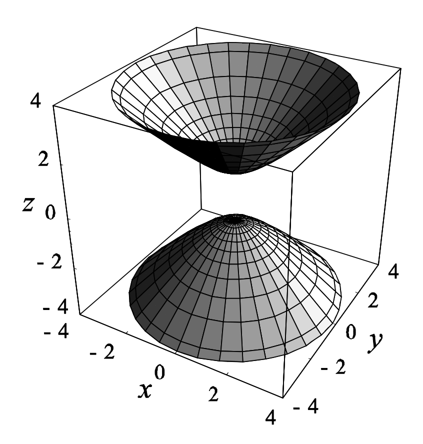
Hiperboloide de una hoja $\quad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

Las trazas horizontales son elipses. Las trazas verticales son en general hipérbolas. La variable con signo negativo indica el eje de simetría.



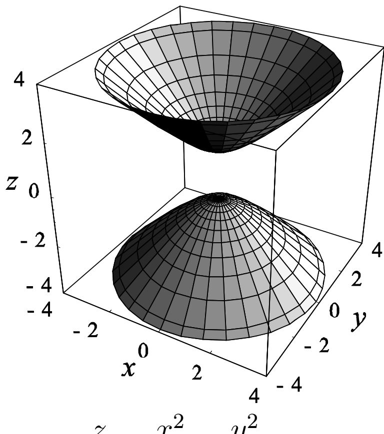
Hiperboloide de dos hojas $\quad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$

Las trazas horizontales son elipses si $k > c$ ó $k < -c$.



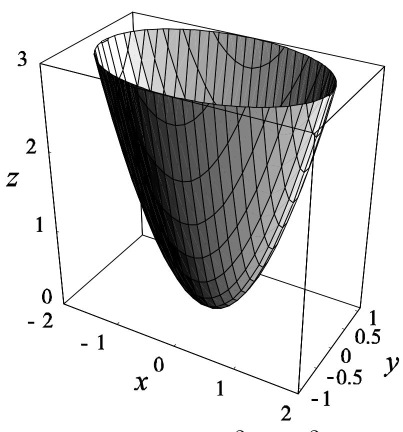
Cono $\quad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$

Las trazas horizontales son elipses (salvo para $k = 0$, que se reducen a un punto). Las trazas verticales son hipérbolas si $k \neq 0$, pero son pares de rectas si $k = 0$. La variable con signo negativo indica el eje de simetría.



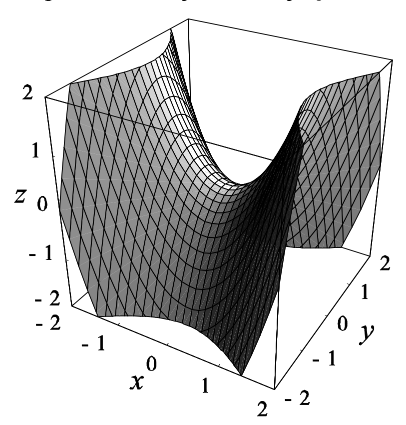
Paraboloide elíptico: $\dfrac{z}{c} = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$

Las trazas horizontales significativas son elipses. Las trazas verticales son parábolas. La variable elevada a la primera potencia indica el eje del paraboloide.



Paraboloide hiperbólico: $\dfrac{z}{c} = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$

Las trazas horizontales son hipérbolas. Las trazas verticales son parábolas abiertas en sentido opuesto según sean paralelas al eje x o al eje y.



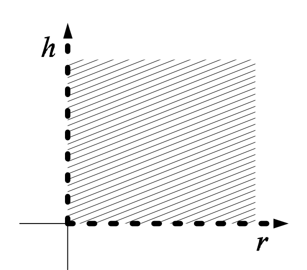
EJERCICIOS

1. Encuentren las trazas de las superficies siguientes en los planos $z = k, x = k$ e $y = k$. Identifiquen cada superficie y dibújenla.
   a. $x^2 - y^2 + z^2 = 1$
   b. $y^2 = z^2 - x^2$
   c. $z = x^2 - y^2$
   d. $4x^2 - 9y^2 + z^2 - 25 = 0$
2. Lleven cada ecuación a una de las formas estándar y clasifíquenla. Hagan un dibujo.
   a. $4x^2 - y^2 + z^2 = 1$
   b. $x^2 + 4y^2 + z^2 - 2x = 0$
   c. $4x = y^2 - 2z^2$

7.3 Funciones de varias variables

Funciones de dos variables

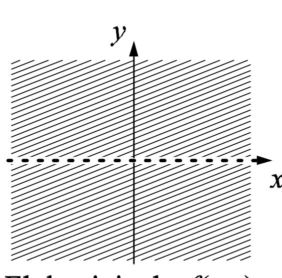
Hasta aquí hemos estudiado a las funciones numéricas de una variable, y a las funciones vectoriales (o sea, funciones cuyo dominio es un subconjunto de los números reales y sus valores son vectores). Ahora estudiaremos a las funciones que dependen de varias variables y toman valores numéricos. Estas funciones tienen sus dominios en subconjuntos del plano (cuando dependen de dos variables) o en subconjuntos del espacio (cuando dependen de tres variables). Daremos a continuación algunos ejemplos de funciones de dos variables.



El dominio de $V(r,h)$

EJEMPLO

1. El volumen V de un cilindro circular recto depende del radio r de su base y de su altura h. De manera que podemos pensar al volumen como una función de las variables r y h, y escribir $V(r, h) = \pi r^2 h$. El dominio de esta función (es decir el conjunto de los pares (r, h) para los cuales la función está definida) es un subconjunto del plano, concretamente el conjunto $\{(r, h) \in \mathbf{R}^2 / r > 0 \text{ y } h > 0\}$ cuya representación gráfica es la del margen.
2. La expresión $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$ define una función de dos variables cuyo dominio es el subconjunto del plano $\{(x, y) \, / y \neq 0\}$



El dominio de $f(x,y)$

A partir de lo dicho y de los ejemplos, podemos dar la siguiente definición:

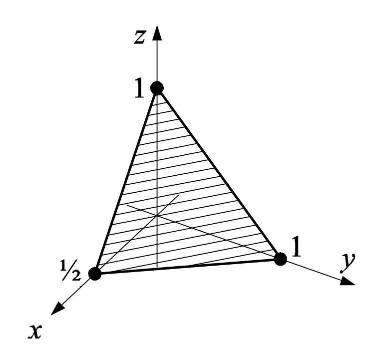
Definición

Una **función de dos variables** es una regla que asigna a cada par ordenado de números reales (x, y) pertenecientes a un subconjunto D del plano, un número real único que llamamos $f(x, y)$. Al conjunto D se lo llama **dominio** de la función f y la **imagen** de la función es el conjunto de valores que toma, es decir, $\{f(x, y) / (x, y) \in D\}$.

EJERCICIOS

Muestren que la imagen de la función $V(r, h)$ del ejemplo 1 es $\{z/z > 0\}$ y que la imagen de la función del ejemplo 2 es toda la recta.

Gráficas



Las intersecciones del plano $z = -2x - y + 1$ con los ejes ayudan a dibujarlo

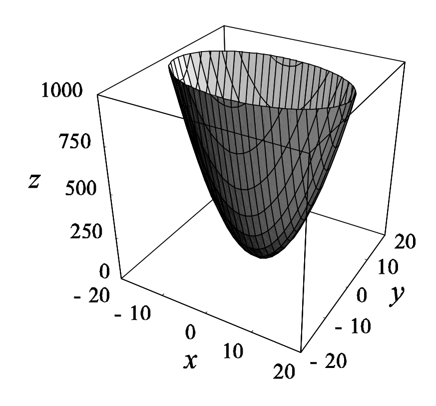
La gráfica de una función de dos variables $f(x, y)$ es una superficie en el espacio. Está formada por todos los puntos de $\mathbf{R}^3$ de la forma $(x, y, f(x, y))$, y por lo tanto tiene la ecuación implícita $z = f(x, y)$.

EJEMPLO

1. Una función lineal de dos variables es de la forma $f(x, y) = Ax + By + C$ donde A, B, C son constantes. Su gráfica es la superficie $z = Ax + By + C$ la cual, como hemos visto en el capítulo 6, es la ecuación de un plano. Por ejemplo si $f(x, y) = -2x - y + 1$ su gráfica es el plano $z = -2x - y + 1$. Una forma útil de graficar un plano es encontrar sus intersecciones con los ejes coordenados, haciendo 0 a dos de las variables y calculando el valor de la restante. En nuestro caso: $(0, 0, 1)\,; (0, 1, 0)\,; (1/2, 0, 0)$.

2. Consideremos la función $f(x, y) = 3x^2 + 9y^2$. Un estudio de las trazas de la superficie $z = 3x^2 + 9y^2$ nos indica que la gráfica es un paraboloide elíptico con el vértice apoyado en el origen y abierto hacia semieje positivo de z.

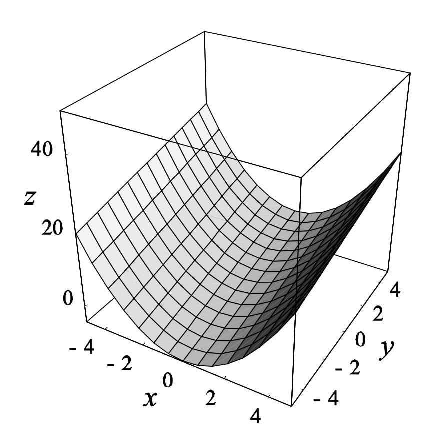
   Observamos que en este caso la imagen de la función es la semirrecta $[0, +\infty)$.



El paraboloide elíptico $z = 3x^2 + 9y^2$

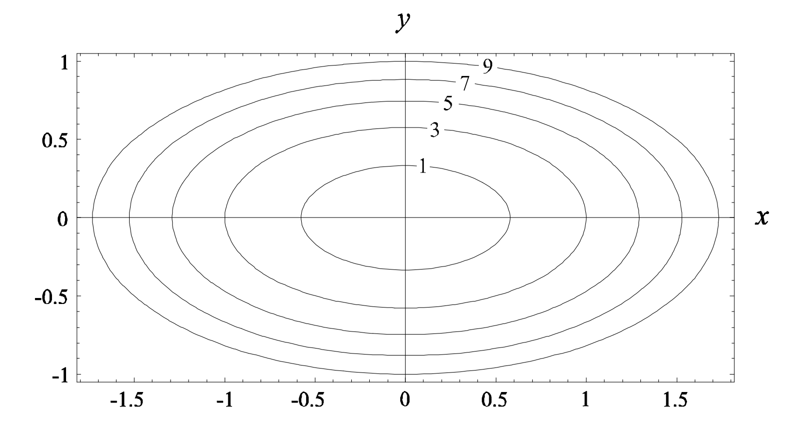
Como caso particular de superficies, las gráficas de funciones de dos variables no son sencillas de visualizar a partir de la expresión de la función. Maple (u otro programa adecuado) puede graficar funciones de dos variables mediante el comando `plot3d` que se usa con el siguiente formato:

```
> plot3d(x^2+y,x=-5..5,y=-5..5);
```



Curvas de nivel

Para una función de dos variables, las curvas de nivel permiten imaginar la gráfica de la función a partir de un dibujo en dos dimensiones. Concretamente, dado un valor numérico k, **la curva de nivel** k de la función $f(x, y)$ es el conjunto de puntos del plano en los cuales la función toma el valor k. Obviamente, es la curva del plano cuya ecuación implícita es $f(x, y) = k$. Si graficamos las curvas de nivel para una cantidad de valores de k tendremos una idea de cómo puede ser la gráfica de $f(x, y)$. Por ejemplo, las curvas de niveles $1, 3, 5, 7$ y 9 de la función del ejemplo 2 son:



EJERCICIOS

1. Sea $f(x, y) = \ln(x + y - 1)$.
   a. Evalúen $f(1, 1)$
   b. Evalúen $f(e, 1)$
   c. Encuentren el dominio y la imagen de la función.
2. Sea $g(x, y) = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$
   a. Evalúen $g(1, 2)$
   b. Encuentren el dominio y dibújenlo en el plano.

c. Encuentren la imagen de g.

3. Determinen el dominio de las siguientes funciones y dibújenlo:
   a. $f(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$
   b. $f(x,y) = \dfrac{3x+5y}{x^2+y^2-4}$
   c. $f(x,y) = \dfrac{2x-y}{2x+y}$
4. Hagan una gráfica esquemática de cada una de las funciones siguientes:
   a. $f(x,y) = 1 - x + y$
   b. $f(x,y) = x$
   c. $f(x,y) = 1 - x^2$
   d. $f(x,y) = \sqrt{25 - x^2 - 25y^2}$
   e. $f(x,y) = \operatorname{sen}(y)$
   f. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$
5. Hagan un mapa de contorno de las funciones siguientes, dibujando en el plano varias curvas de nivel para valores representativos de k:
   a. $f(x,y) = xy$
   b. $f(x,y) = x/y$
   c. $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$
   d. $f(x,y) = x - y^2$
6. Para una función de tres variables $f(x,y,z)$ se define la **superficie de nivel** k como el conjunto de puntos (x,y,z) para los cuales $f(x,y,z) = k$. Describan algunas superficies de nivel para las funciones siguientes:
   a. $f(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + 5z^2$
   b. $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2$
7. Consideren la función $f(x,y) = \dfrac{4}{1+x^2+y^2}$
   a. ¿Cuál es la ecuación de la curva de nivel que pasa por $(1,\sqrt{2})$?
   b. Grafiquen varias curvas de nivel e infieran la forma de la gráfica de $f(x,y)$.

Capítulo 8
Diferenciación de funciones de varias variables

8.1 Límites y continuidad

El concepto de límite para funciones de dos o más variables es similar al que establecimos para funciones de una variable, pero a su vez tiene algunas diferencias importantes a la hora de estudiar la existencia o inexistencia de un límite.

Comencemos con las cuestiones compartidas. En primer lugar, la idea intuitiva es la misma: el límite de la función $f(x,y)$ cuando $(x,y) \to (a,b)$ será un número L si los valores de $f(x,y)$ están tan próximos a L como se quiera, para puntos (x,y) suficientemente próximos a (a,b). En tal caso, escribimos:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

Continuando con las similitudes con el caso de una variable, digamos que las propiedades de los límites son las mismas que en aquel caso, adaptando las cuestiones obvias. Las repasamos:

El límite de una función constante

Si $f(x,y) = k$, entonces:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = k$$

EJEMPLO

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} 2 = 2$$

Los límites de las funciones coordenadas

Cuando $(x,y) \to (a,b)$ **los límites de las funciones coordenadas** x e y son respectivamente a y b, es decir:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a \qquad \lim_{(x,y)\to(a,b)} y = b$$

EJEMPLO

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} x = 1 \qquad \lim_{(x,y)\to(1,2)} y = 2$$

El límite de la suma

Si las funciones $f(x,y)$ y $g(x,y)$ tienen límite cuando $(x,y) \to (a,b)$, entonces la función suma $(f+g)(x,y)$ tiene límite cuando $(x,y) \to (a,b)$, y ese límite es la suma de los límites de f y g:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} (f+g)(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) + \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)$$

EJEMPLO

$$\lim_{(x,y)\to(-2,0)} x+y+3 = \lim_{(x,y)\to(-2,0)} x + \lim_{(x,y)\to(-2,0)} y + \lim_{(x,y)\to(-2,0)} 3 = -2+0+3 = 1$$

El límite del producto

Si las funciones $f(x,y)$ y $g(x,y)$ tienen límite cuando $(x,y) \to (a,b)$, entonces la función producto $(f \cdot g)(x,y)$ tiene límite cuando $(x,y) \to (a,b)$, y ese límite es el producto de los límites de f y g:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} (f \cdot g)(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \cdot \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)$$

EJEMPLO

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(2,-1)} x^2y + 4x &= \lim_{(x,y)\to(2,-1)} x^2 \cdot \lim_{(x,y)\to(2,-1)} y + \lim_{(x,y)\to(2,-1)} 4 \cdot \lim_{(x,y)\to(2,-1)} x \\ &= 2^2 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 = 4 \end{aligned}$$

Observemos que de lo anterior puede deducirse que si $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ entonces $\lim_{(x,y)\to(a,b)} -f(x,y) = -L$ y por lo tanto que el límite de una diferencia es la diferencia de los límites.

El limite del cociente

Siempre que el límite del denominador sea distinto de 0, el límite del cociente es el cociente de los límites:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \left(\frac{f}{g}\right)(x,y) = \frac{\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)}{\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)} \qquad \text{siempre que } \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) \neq 0$$

EJEMPLO

$$\lim_{(x,y)\to(3,1/2)} \frac{x^2y - 3y + 1}{x - y} = \frac{9/2 - 3/2 + 1}{3 - 1/2} = \frac{4}{5/2} = \frac{8}{5}$$

De las propiedades anteriores podemos concluir, análogamente a lo que sucedía con los límites en una variable, que el límite cuando $(x, y) \to (a, b)$ de cualquier función obtenida a partir de operaciones de suma, producto (y por lo tanto potencias) y cocientes realizadas a partir de las funciones coordenadas x e y y las constantes, se puede calcular por evaluación siempre que (a, b) esté en el dominio natural de la función.

El hecho de que un límite pueda calcularse por simple evaluación, esto es que:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

nos lleva, al igual que en el caso de una variable, a la noción de continuidad.

Definición

Diremos que $f(x, y)$ es **continua** en (a, b) si se cumplen las tres condiciones siguientes:

1. El punto (a, b) y todos los puntos cercanos a él están en el dominio de $f(x, y)$.
2. El límite $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ existe.
3. El límite es igual al valor de la función en (a, b) : $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)$.

Enunciamos una propiedad importante, que nos permitirá asegurar la continuidad de ciertas funciones:

Teorema

Supongamos que $f(x, y)$ es una función de dos variables que es continua en un punto (a, b) de su dominio, y que $g(z)$ es una función numérica que es continua en el valor $c = f(a, b)$. Entonces la función compuesta $g(f(x, y))$ es continua en (a, b).

EJEMPLO

1. La función $z(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ es continua en todo su dominio, puesto que $f(x, y) = x^2 + y^2$ y $g(z) = \ln(z)$ son continuas.
2. La función $z(x, y) = \sqrt{xy}$ es continua en todo su dominio, puesto que $z(x, y) = xy$ y $g(z) = \sqrt{z}$ son continuas.
3. La función $\cos(e^{x/y})$ es continua en todo su dominio puesto que $z(x, y) = x/y$ y $g(z) = \cos(e^z)$ son continuas.

Existencia de los límites

Recordemos que para funciones de una variable, la existencia del límite era equiva-

lente a la existencia e igualdad de los límites laterales. Lamentablente, en el caso de una función de dos variables la cosa no es tan sencilla: para un punto del plano existen infinidad de formas de llegar a él, lo cual hace que el método de acercarse de alguna determinada manera sea impracticable a la hora de asegurar la existencia de un límite.

Sin embargo, si el límite existe, tendrá que ser el mismo para cualquier manera de acercarse al punto que uno elija. Esta observación provee una herramienta útil para dos tareas:

1. Distintas maneras de acercarse, pueden proporcionar información acerca del valor posible del límite.

2. Si con dos maneras diferentes de acercarse al punto se obtienen valores distintos del límite, entonces el límite no existe.

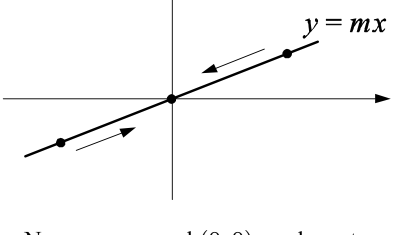
Veamos algunos ejemplos:

EJEMPLO

Estudiar la existencia del límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$$

Como numerador y denominador se anulan en $(0,0)$ no es posible decidir la existencia o no del límite inmediatamente. Si el límite existiera, debería obtenerse ese valor cualquiera sea la forma en la que nos aproximemos al punto (0,0). Por ejemplo, podríamos aproximarnos por una recta que pase por el origen; tal recta tiene una ecuación de la forma $y = mx$.



Nos acercamos al $(0,0)$ por la recta $y = mx$

Un punto de la recta tendrá coordenadas (x, mx), y para que se aproxime a (0,0) bastará hacer $x \to 0$. Reemplazando $y = mx$ en la función:

$$f(x, mx) = \frac{2mx^2}{x^2+m^2x^2}$$

de manera que si tomamos el límite cuando $x \to 0$ de $f(x, mx)$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2mx^2}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2m}{1+m^2} = \frac{2m}{1+m^2}$$

que toma distintos valores según m. Por ejemplo, para $m = 1$ vale 1, mientras que para $m = 2$ vale 4/5. Hemos comprobado que para diferentes valores de la pendiente m (que representan distintos caminos para acercarse a (0,0)) el límite:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} f(x, mx)$$

existe, pero toma distintos valores. Podemos concluir que el límite original **no existe**.

Una forma sencilla de comenzar a estudiar la existencia de un límite en dos variables es tomar los **límites iterados**. Pongamos, por caso, que estamos interesados en el

límite:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$$

lo que hacemos es calcular los límites en una variable:

$$\lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right)$$

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right)$$

Si estos límites son distintos, el límite original no existirá.

EJEMPLO

Estudiar la existencia de límite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{ye^x + xe^x}{x+2y}$$

Tomando los límites iterados:

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{ye^x + xe^x}{x+2y}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{ye^0}{2y} = \lim_{y\to 0}\frac{e^0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{ye^x + xe^x}{x+2y}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{xe^0}{x} = \lim_{x\to 0} e^0 = 1$$

obtenemos diferentes valores; en consecuencia, el límite original no existe.

EJERCICIOS

1. En el ejemplo anterior, los límites iterados pueden interpretarse como distintas formas de aproximarse a $(0,0)$. Interpreten gráficamente cuáles son esas formas de llegar a $(0,0)$ en cada caso.

2. Si los límites iterados son iguales ¿Puede afirmarse algo respecto del límite original?

Enunciaremos el siguiente criterio:

Si una función $f(x,y)$ tiene distintos límites a lo largo de dos trayectorias diferentes cuando $(x,y)\to(a,b)$ entonces el límite no existe.

EJEMPLO

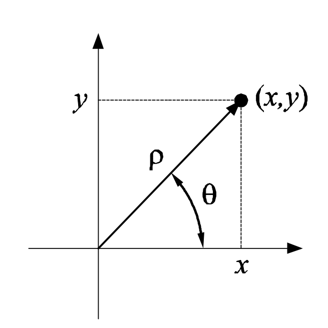
Consideremos ahora el límite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2}$$

que también está indeterminado en principio. Si hacemos la sustitución $y = mx$,

obtenemos:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^2+(mx)^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^2(1+m^2)} = \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x}{1+m^2} = 0, \text{ cualquiera sea el valor de } m.\end{aligned}$$



Coordenadas polares: $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta$

¿Será 0 el límite? No es viable probar con todas las trayectorias posibles para decidir. Un método que da resultado algunas veces es el uso de coordenadas polares. Se trata, tal como lo hicimos con vectores, de describir a un punto (x, y) del plano distinto del origen, a partir de su módulo y del ángulo que forma su vector de posición con el eje positivo de las x.

Las relaciones entre ambos sistemas de coordenadas son las que ya conocemos:

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\theta \\ y &= \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{aligned}$$

Si reemplazamos en $f(x, y)$ las relaciones anteriores obtendremos una expresión en ρ y θ. Notamos que $(x, y) \to (0, 0)$ es equivalente a pedir que $\rho \to 0$. Por lo tanto:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^3\cos^3\theta}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0}\rho\cos^3\theta = 0$$

puesto que $|\cos\theta| \leq 1$.

ACTIVIDAD

Respondan a las siguientes preguntas (para responder pueden consultar alguno de los libros que están en el aula):

1. ¿Cuándo se dice que una función es continua en (a, b)?
2. ¿Cuál es el significado intuitivo de la continuidad?
3. ¿Cuándo se dice que $f(x, y)$ es continua en todo su dominio?
4. ¿Cuál es la expresión general de un polinomio en dos variables?
5. ¿Los polinomios son funciones continuas?
6. ¿Cuál es la expresión general de una función racional en dos variables?
7. ¿Las funciones racionales son continuas?

EJERCICIOS

1. Encuentren el límite si existe o muestren que el límite no existe:

   a. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-3,0)}\frac{e^{xy}}{x^2+y^2}$

b. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\pi,1)} \frac{\cos xy}{y^2+1}$

c. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$

d. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{8x^2y^2}{x^4+y^4}$

e. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+xy^2}{x^2+y^2}$

f. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$

g. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y \operatorname{sen} x}{x^2+y^2}$

h. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2}{2x^2-y^2}$

i. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$

2. Encuentren el conjunto donde cada función es continua:

a. $f(x,y) = 4xy + \operatorname{sen} 3x^2y$

b. $f(x,y) = \sqrt{9-x^2+y^2}$

c. $f(x,y) = \ln(3-x^2+y)$

d. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{2x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

8.2 Derivadas parciales

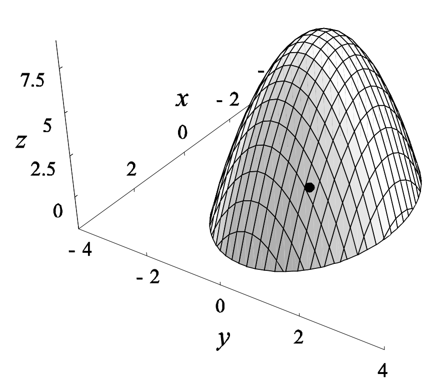


Figura 1
La gráfica de $f(x,y) = 8 - x^2 - y^2$

Supongamos que $f(x,y)$ es una función de dos variables, definida en un dominio D. Consideremos un punto (a,b) en D y supongamos que los puntos cercanos también están en D. La gráfica de la función es, como sabemos, la superficie $z = f(x,y)$. Queremos estudiar cómo está variando $f(x,y)$ cuando nos paramos en el punto (a,b). Veamos cómo hacerlo mediante un ejemplo:

EJEMPLO

Sea $f(x,y) = 8 - x^2 - y^2$ y consideremos el punto $(2,1)$. Ver Figura 1.

Haciendo $y = 1$ obtenemos la función de una variable $f(x,1) = 8 - x^2 - 1 = 7 - x^2$. Geométricamente podemos imaginar (en el espacio) la gráfica $z = f(x,y)$ que cortamos con el plano $y = 1$. La curva intersección de la gráfica y el plano es la

gráfica de la función $z(x) = 7 - x^2$ en el plano $y = 1$. Ver figura 2.

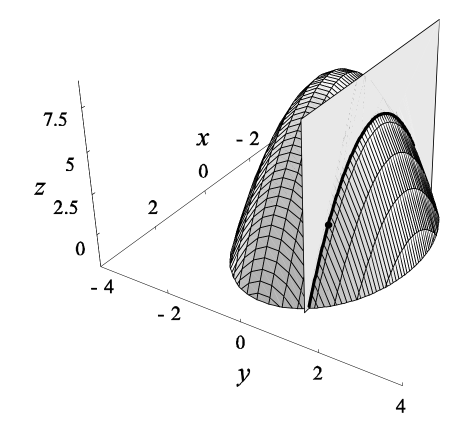


Figura 2
La gráfica de $f(x, y) = 8 - x^2 - y^2$ cortada por el plano $y = 1$

La función de una variable $z(x) = 7 - x^2$ es derivable, y su derivada es $z'(x) = -2x$. En particular, para $x = 2$ se tiene que $z'(2) = -4$. Geométricamente la pendiente representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica por el punto $x = 2; z = 3$. La ecuación de esa recta en el plano $y = 1$, es:

$$z - 3 = -4(x - 2)$$

Incluimos esa recta en nuestro dibujo de la Figura 3.

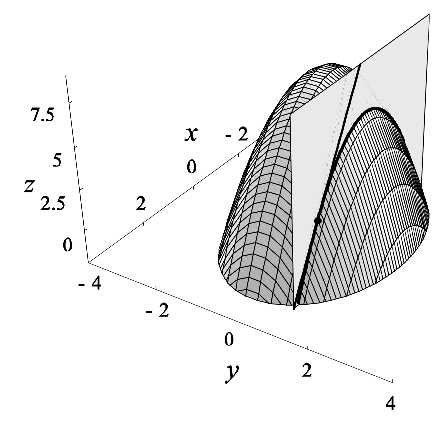


Figura 3
La gráfica de $f(x, y) = 8 - x^2 - y^2$ cortada por el plano $y = 1$ y la recta tangente.

De la misma forma, podemos ahora considerar $x = 2$ y obtener la función de una variable $z(y) = f(2, y) = 4 - y^2$ cuya gráfica en el plano $x = 2$ se ve en la Figura 4.

Si derivamos a $z(y)$ respecto de la variable y :

$$z'(y) = -2y$$

En particular para $y = 1$:

$$z'(1) = -2$$

que es la pendiente de la recta tangente a la curva $z = z(y)$ por el punto $y = 1; z = 3$ en el plano $x = 2$, que tiene ecuación:

$$z - 3 = -2(y - 1)$$

Ver Figura 5.

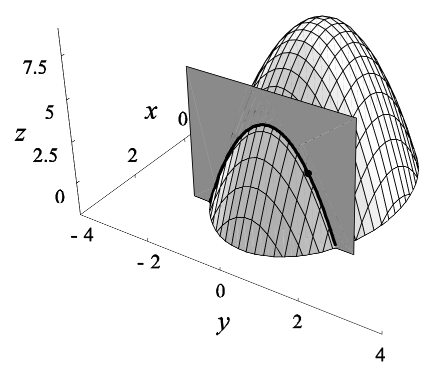


Figura 4
La gráfica de $f(x, y) = 8 - x^2 - y^2$ cortada por el plano $x = 2$.

A modo de conclusión para este ejemplo, dada la función $f(x, y) = 8 - x^2 - y^2$ podemos estudiar su variación en el punto $(2, 1)$ de dos maneras:

- Considerando a y constante igual a 1, derivando a la función $f(x, 1)$ respecto a la variable x y evaluando en $x = 2$. A este número se lo llama **derivada parcial de $f(x, y)$ respecto de x en el punto** $(2, 1)$. Lo indicaremos:
$$f_x(2, 1) = -4$$
o bien (en la notación de Leibniz):
$$\frac{\partial f}{\partial x}(2, 1) = -4$$
- Considerando a x constante igual a 2, derivando a la función $f(2, y)$ respecto a la variable y y evaluando en $y = 1$. A este número se lo llama **derivada parcial de $f(x, y)$ respecto de y en el punto** $(2, 1)$. Lo indicaremos:
$$f_y(2, 1) = -2$$
o bien (en la notación de Leibniz):
$$\frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) = -2$$

Pongamos por caso que nuestra función está dando la temperatura en ^oC de una lámina metálica en el punto de coordenadas (x, y). Las derivadas parciales nos dicen que si estamos en el punto $(2, 1)$ la temperatura está disminuyendo a razón de $4^oC/$unidad de longitud en el sentido de las x crecientes y a razón de $2^oC/$unidad de longitud en

el sentido de las y crecientes.

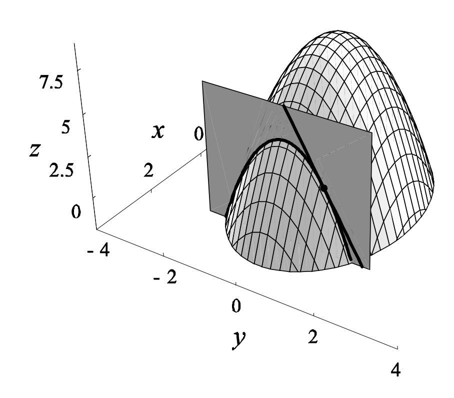


Figura 5
La gráfica de $f(x, y) = 8 - x^2 - y^2$ cortada por el plano $x = 2$ y la recta tangente.

EJERCICIOS

Con relación al ejemplo anterior muestren que las rectas tangentes obtenidas tienen como vectores directores a $\langle 1, 0, -4\rangle$ y a $\langle 0, 1, -2\rangle$. Escriban las ecuaciones paramétricas de ambas rectas.

Daremos una definición más formal de las derivadas parciales:

Definición

Supongamos que $f(x, y)$ es una función de dos variables, definida en un dominio D. Consideremos un punto (a, b) en D y supongamos que los puntos cercanos también están en D. Se definen:

- La **derivada parcial de** $f(x, y)$ **respecto de** x **en el punto** (a, b) como el límite:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$$

siempre que este límite exista. La indicaremos:

$$f_x(a, b) \text{ o bien } \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$$

La **derivada parcial de** $f(x, y)$ **respecto de** y **en el punto** (a, b) como el límite:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h}$$

siempre que este límite exista. La indicaremos:

$$f_y(a, b) \text{ o bien } \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$$

En la práctica, la derivada respecto de x de $f(x, y)$ se obtiene considerando a y como constante, y derivando a f como una función de x. Análogamente se calcula la derivada respecto de y.

EJEMPLO

Cálculo de derivadas parciales:

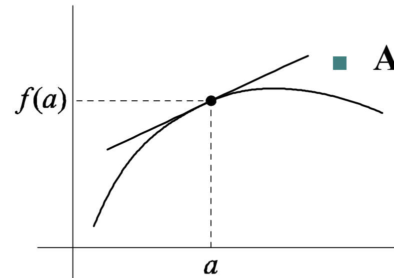
1. Si $f(x, y) = 2xy^2$, entonces $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2y^2$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4xy$
2. Si $f(x, y) = \frac{3x}{y^2}$, entonces $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{3}{y^2}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{6x}{y^3}$
3. Si $f(x, y) = y\ln(xy)$, entonces $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y}{x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \ln(xy) + 1$

4. Si $f(x,y)=\cos(x+y^2)$, entonces $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\operatorname{sen}(x+y^2)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\operatorname{sen}(x+y^2)2y$

EJERCICIOS

1. Encuentren las derivadas parciales de las siguientes funciones:
   a. $f(x,y)=x^3-3xy^2+y^4$
   b. $f(x,y)=x^2e^y$
   c. $f(x,y)=\cos(xy^2)$
   d. $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x^2}+x\operatorname{sen}(y)$
   e. $f(u,v)=\ln(uv^2)$
   f. $f(x,y)=x^y$
   g. $f(x,y)=\operatorname{sen}(2x+y)$
   h. $f(s,t)=\dfrac{s}{s+t}$
   i. $f(u,t)=e^{-u}\operatorname{sen}(t)$
   j. $f(x,y)=\sqrt{x+2y}$
2. El plano $y=2$ corta al elipsoide $4x^2+2y^2+z^2=16$ en una elipse. Encuentren ecuaciones paramétricas para la recta tangente a esa elipse por el punto $(1,2,2)$. Sugerencia: considere la gráfica de la función $f(x,y)=\sqrt{16-4x^2-2y^2}$, la pendiente de la recta sobre el plano $y=2$ es una de las derivadas parciales de $f(x,y)$.

8.3 Plano Tangente. Diferenciabilidad



La aproximación lineal centrada en a es $L(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$

Aproximaciones lineales

Definición

Supongamos que $f(x)$ es una función de una variable que es derivable en $x=a$. La función lineal
$$L(x)=f'(a)(x-a)+f(a)$$
se denomina **aproximación lineal de $f(x)$ centrada en** a.

Es claro que la gráfica de $L(x)$ es la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ por el punto $(a, f(a))$.

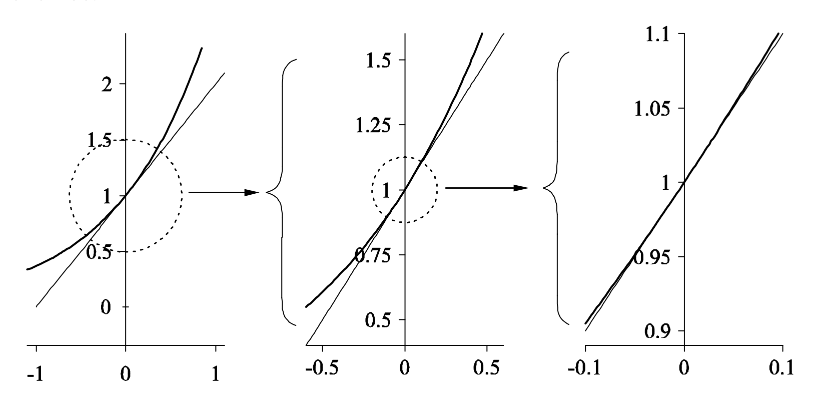
Para valores de x próximos a a la función lineal $L(x)$ es una buena aproximación para $f(x)$; más aún, para valores de x suficientemente próximos a a ambas gráficas son prácticamente indistinguibles. Veremos esto con más detalle en la discusión de la página 204.

EJEMPLO

Consideremos $f(x) = e^x$ y $x = 0$. La aproximación lineal de $f(x)$ centrada en 0 es la función lineal:

$$L(x) = f'(0)(x - 0) + f(0) = x + 1$$

Si dibujamos ambas funciones en intervalos cada vez más pequeños alrededor de $x = 0$ obtenemos:



Notemos que para $-0.1 < x < 0.1$ la diferencia entre e^x y $x + 1$ es muy pequeña:

x	-0.1	-0.09	-0.05	0	0.05	0.09	0.1
e^x	0.9048	0.9139	0.9512	1	1.0513	1.0942	1.1052
$x+1$	0.9	0.91	0.95	1	1.05	1.09	1.1

Veamos como estas ideas pueden ser útiles en una situación real:

EJEMPLO

Un automóvil transita por una carretera recta. A las 10:42 pasa frente a un control policial que registra su velocidad por medio de un radar: la lectura obtenida fue de 92 km/h ¿A cuántos kilómetros del control estará el auto a las 10:51?

Obviamente no es posible responder a la pregunta, porque ignoramos si el auto prosiguió a la misma velocidad, de todas maneras podemos recurrir a la aproximación lineal para dar una estimación de la posición del automóvil. Si llamamos $f(t)$ a la posición del auto medida en kilómetros desde el control policial y medimos el tiempo

en minutos ($t = 0$ es el instante en que pasa por el control) tendremos:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f'(0) &= \frac{92}{60}\text{km}/\min \end{aligned}$$

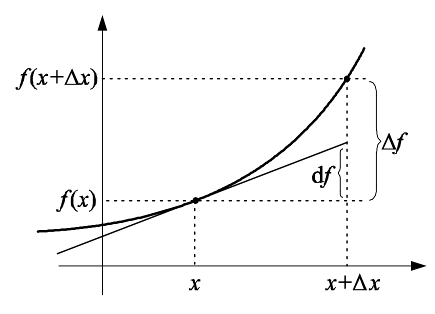
la aproximación lineal será:

$$L(t) = \frac{92}{60}t$$

y para $t = 9$ (que corresponde a las 10:51) se tendrá:

$$L(9) = \frac{92}{60} \times 9 = 13.8 \text{ km}$$

Diferenciales



Para incrementos pequeños $\Delta f \simeq df$

Supongamos que $f(x)$ es derivable. Si incrementamos al valor x en un cantidad Δx, esto es: nos movemos al valor $x + \Delta x$ la función f tendrá una variación total:

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$$

si desconocemos el valor $f(x+\Delta x)$ no podremos calcular Δf. Pero si el incremento Δx es pequeño, podremos estimar a Δf usando la aproximación lineal de f centrada en x:

$$\begin{aligned} \Delta f &\simeq L(x + \Delta x) - f(x) \\ \Delta f &\simeq f'(x)(x + \Delta x - x) + f(x) - f(x) \\ \Delta f &\simeq f'(x)\Delta x \end{aligned}$$

Definición

A la expresión $f'(x)\Delta x$ se la llama **diferencial** de la función f y se la indica con df. La expresión anterior puede escribirse entonces:

$$\Delta f \simeq df = f'(x)\Delta x$$

La diferencia entre Δf y df es que para conocer el valor del primero tenemos que conocer los valores de f en x y en $x + \Delta x$ mientras que para conocer df nos basta con el valor de f y el de su derivada en x. Esto, a veces, es algo muy útil. Veamos un ejemplo:

EJEMPLO

Se mide el radio de una esfera y el resultado fue de 21 cm; se sabe que el error de medición cometido fue cuando mucho, de 0.05 cm ¿Cuál será el error máximo que se puede cometer al usar ese valor para obtener el volumen de la esfera?

Bien, supongamos que r es el valor obtenido en la medición y que Δr es el error cometido en esa medición. Por supuesto que no conocemos cuánto vale exactamente

Δr (de lo contrario conoceríamos el valor exacto del radio). Si con $V(x)$ denotamos el volumen de la esfera de radio x entonces $V(r)$ será el volumen obtenido usando la medición, y $V(r+\Delta r)$ el volumen correspondiente al verdadero valor del radio. Nos interesa estimar:

$$|\Delta V| = |V(r+\Delta r) - V(r)|$$

esto no lo podemos calcular porque desconocemos Δr. Pero lo podemos estimar por medio de:

$$\Delta V \simeq dV$$

Como para la esfera se tiene $V(r) = \dfrac{4}{3}\pi r^3$, entonces $dV = 4\pi r^2 \Delta r$.

Para $r = 21$ y $|\Delta r| \leq 0.05$ tendremos que:

$$|dV| = 4\pi(21)^2\,|\Delta r| \leq 4\pi(21)^2 \times 0.05 \simeq 277.089 \text{ cm}^3$$

nos da una estimación para el error cometido.

Observación: Si $g(x) = x$ entonces $dg = dx = g'(x)\Delta x = \Delta x$, y por ello se escribe usualmente el diferencial de una función cualquiera como:

$$df = f'(x)dx$$

EJERCICIOS

1. Consideren la función $f(x) = \sqrt{1+x}$
   a. Determinen la aproximación lineal de f centrada en 0.
   b. Utilicen esa aproximación para estimar $\sqrt{1.2}$; $\sqrt{1.05}$; $\sqrt{1.005}$
   c. Si nos alejamos de su centro, la aproximación lineal generalmente pierde precisión. La aproximación del inciso a probablemente sea poco útil cerca de $x = 3$. Para ello será necesario aproximar a f con centro en 3. Háganlo.
   d. Usen la aproximación lineal con centro en 3 para estimar $\sqrt{4.2}$. Comparen con lo que se obtiene por calculadora.
   e. Hagan lo mismo para $\sqrt{5.2}$
2. Determinen las aproximaciones lineales de las funciones seno, coseno y tangente para valores de x cercanos a 0.
3. Consideren la función $f(x) = x^2$. Nos situamos en $x = 1$ y nos movemos a $x = 1.5$. Calculen Δf y df. Grafiquen interpretando todos los elementos anteriores.
4. Encuentren los diferenciales de las siguientes funciones:
   a. $f(x) = x^5$
   b. $f(x) = \sqrt{x^3 - 1}$
   c. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2}$
   d. $f(x) = \operatorname{sen} 2x$

5. Empleen diferenciales para encontrar un valor aproximado del número que se pide:

   a. $\sqrt{36.1}$ b. $\dfrac{1}{10.1}$
   c. $\operatorname{sen} 56^o$ d. $\cos 31.5^o$

Derivabilidad y diferenciabilidad

Para funciones de una variable, la sola existencia de la derivada en un valor asegura que la aproximación lineal es una buena aproximación a la función cerca del punto. Dicho de otra manera, la existencia de la derivada asegura que la recta tangente y la gráfica de la función serán indistinguibles cuando el intervalo considerado sea suficientemente pequeño. Vamos a precisar ésto.

Supongamos que $f(x)$ es una función derivable en $x = a$ y consideremos su aproximación lineal centrada en a:

$$L(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$$

La diferencia, entre la función y su aproximación lineal es:

$$\begin{aligned} f(x) - L(x) &= f(x) - f'(a)(x-a) - f(a) \\ f(x) - L(x) &= f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) \end{aligned}$$

Es claro que el límite cuando $x \to a$ del miembro izquierdo es 0, lo cual habla de que $L(x)$ y $f(x)$ están próximos cuando x y a lo están. Ahora bien, esto mismo sucede para cualquier función lineal que en a valga $f(a)$, por un simple argumento de continuidad. Pero la aproximación lineal cumple con algo más, que es lo que distingue a la recta tangente de cualquier otra que pase por $(a, f(a))$. En efecto si en la última ecuación dividimos ambos miembros por $x - a$ tenemos:

$$\frac{f(x) - L(x)}{x-a} = \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - f'(a)$$

Y si tomamos límite para $x \to a$:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - L(x)}{x-a} = \underbrace{\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}}_{\text{tiende a } f'(a)} - \underbrace{\lim_{x \to a} f'(a)}_{\text{es } f'(a)}$$

Por consiguiente:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - L(x)}{x-a} = 0$$

Es decir: la diferencia entre la función y la aproximación lineal dividida por $x - a$ aún tiende a 0. Esta es la característica que distingue a la recta tangente de cualquier otra recta que pase por $(a, f(a))$ (ver ejercicio siguiente). En este caso diremos que $f(x)$ es **diferenciable** en $x = a$.

EJERCICIOS

(Derivabilidad y diferenciabilidad) Sea $f(x)$ una función que está definida en un intervalo alrededor de $x = a$.

1. Supongan que $L(x) = m(x-a) + f(a)$ es una función lineal que verifica la condición
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - L(x)}{x-a} = 0$$
muestren que entonces $f(x)$ es derivable en $x = a$ y que $f'(a) = m$. Concluyan que $L(x)$ es la aproximación lineal de $f(x)$ centrada en a.

2. Usando el punto 1 y la discusión anterior muestren que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   - $f(x)$ es derivable en $x = a$

   - Existe una única función lineal $L(x)$ tal que $L(a) = f(a)$ y tal que:
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - L(x)}{x-a} = 0$$

Lo anterior nos dice que, para una función de una variable, los conceptos de derivabilidad y de diferenciabilidad son lo mismo.

Veremos en la sección siguiente que para funciones de más de una variable la situación no es tan clara, puesto que la sola existencia de las derivadas parciales no asegura que la función posea una buena aproximación lineal.

Diferenciabilidad de funciones de varias variables

Lamentablemente, para una función de dos variables, la sola existencia de las derivadas parciales en un punto (a, b) no asegura que la gráfica de $f(x, y)$ tenga un plano tangente que la aproxime bien para los (x, y) próximos a (a, b). Estudiemos esta situación:

Definición

Supongamos que $f(x, y)$ está definida alrededor de un punto (a, b), y que existen las derivadas parciales $f_x(a, b)$ y $f_y(a, b)$. A la función lineal

$$L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) \qquad (*)$$

se la denomina **aproximación lineal de** $f(x, y)$ **centrada en** (a, b).

Notemos lo siguiente:

- Sobre el plano $x = a$ la ecuación (*) queda:
$$L(a, y) = f(a, b) + f_y(a, b)(y - b)$$
que es la ecuación de la recta tangente a la curva $z = f(a, y)$ (siempre en ese plano).
- Sobre el plano $y = b$ la ecuación (*) queda:
$$L(x, b) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a)$$
que es la ecuación de la recta tangente a la curva $z = f(x, b)$ (siempre en ese plano).

.

De manera que, *de haber* un plano tangente a la gráfica de $z = f(x, y)$, ése sería el plano definido por la ecuación:

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

puesto que éste es el plano que contiene a ambas rectas tangentes.

Es claro que ese plano aproxima bien a $f(x, y)$ sobre los planos $x = a$ e $y = b$, pero no necesariamente lo hace en las direcciones restantes, como lo muestra el siguiente ejemplo, en el que se muestra una función con derivadas parciales que no se aproxima linealmente.

EJEMPLO

Consideremos la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Se puede ver (hacerlo) que la función f tiene derivadas parciales en $(0, 0)$ y de hecho que:

$$\begin{aligned} f_x(0, 0) &= 0 \\ f_y(0, 0) &= 0 \end{aligned}$$

La aproximación lineal $L(x, y)$ de f centrada en $(0, 0)$ es entonces:

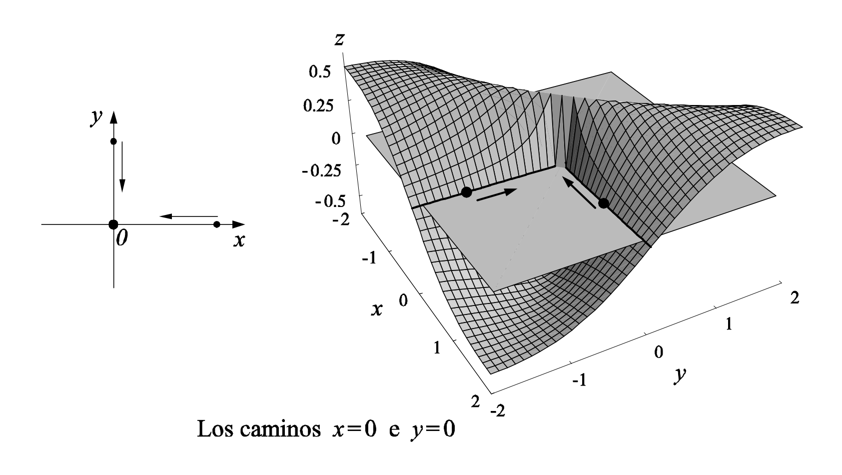
$$L(x, y) = 0$$

y por lo tanto el "plano tangente" resulta ser el plano xy :

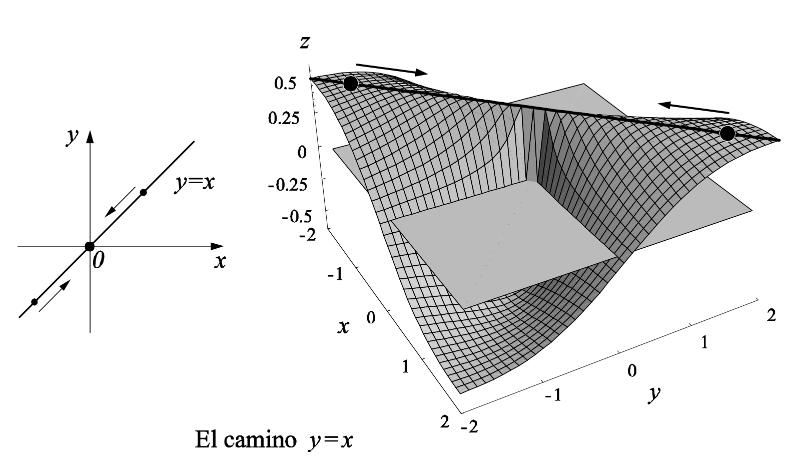
Sin embargo, sobre la recta $x = y$ (salvo en $(0, 0)$) la función vale:

$$f(x, x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

de manera que $L(x, y)$ no resulta una buena aproximación para $f(x, y)$. Los dibujos siguientes ilustran este ejemplo:



Los caminos $x=0$ e $y=0$



El camino $y=x$

Todo esto nos lleva a dar la siguiente definición:

Definición

Sea $f(x, y)$ una función definida en (a, b) y en todos los puntos cercanos. Diremos que f es **diferenciable** en (a, b) si existe una función lineal $L(x, y)$ tal que:

$$f(x, y) - L(x, y) = \varepsilon_1(x, y)(x - a) + \varepsilon_2(x, y)(y - b)$$

donde $\varepsilon_1(x,y)$ y $\varepsilon_2(x,y)$ son dos funciones tales que:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \varepsilon_1(x,y) = 0$$
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \varepsilon_2(x,y) = 0$$

En primer lugar notemos que, con unas cuentas similares a las del Ejercicio de la página 204 puede mostrarse que si f es diferenciable en (a,b) entonces tiene derivadas parciales en (a,b) y la función lineal $L(x,y)$ es la aproximación lineal de f centrada en (a,b), esto es: $L(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$.

La complicada definición anterior admite entonces estas sencillas interpretaciones:

- $f(x,y)$ es diferenciable en (a,b) si y solamente si la aproximación lineal de f centrada en (a,b) es una "buena" aproximación para los valores de $f(x,y)$ para (x,y) cercanos a (a,b).
- $f(x,y)$ es diferenciable en (a,b) si y solamente si el plano definido por la aproximación lineal es tangente a la gráfica de $f(x,y)$ por el punto $(a,b,f(a,b))$.
- $f(x,y)$ es diferenciable en (a,b) si y solamente si la gráfica de $f(x,y)$ se confunde con un plano, sobre un entorno suficientemente pequeño alrededor de (a,b).

Para mostrar que una función es diferenciable en un punto es necesario poder escribir a la función en la forma de la definición, lo cual es complicado en general. Para nuestros objetivos bastará con el sencillo criterio que da el siguiente teorema, cuya demostración se omitirá en este curso.

Teorema

Supongamos que las derivadas parciales de $f(x,y)$ existen y son continuas en (a,b) y en todos los puntos próximos a (a,b). Entonces $f(x,y)$ es diferenciable en (a,b).

Es decir, la diferenciabilidad queda asegurada por la continuidad de las derivadas parciales[4].

Análogamente a lo que hicimos en una variable, si f es diferenciable, definimos el **diferencial** de f como la expresión:

$$df = f_x dx + f_y dy$$

la cual puede verse como una forma útil de aproximar a Δf para valores pequeños de los incrementos $\Delta x = dx$ y $\Delta y = dy$.

EJERCICIOS

1. Consideren la función $f(x,y) = xy^2 + x^2y$
   a. ¿En qué puntos es diferenciable?¿Por qué?
   b. Sitúense en el punto P(2,-3). Encuentren la aproximación lineal de $f(x,y)$ centrada en P y la ecuación del plano tangente a la gráfica de $f(x,y)$ sobre

[4] El criterio funciona en un solo sentido. No es cierto en general que una función diferenciable deba tener derivadas parciales continuas.

ese punto.

c. Usen el punto anterior para calcular aproximadamente $2.01\cdot(-2.99)^2 + (2.01)^2 \cdot (-2.99)$.

2. Encuentren la ecuación del plano tangente a la superficie dada en el punto que se indica:

   a. $z = x^2 - xy$ en $(-2, 1, 6)$

   b. $z = \ln(2x + y)$ en $(-1, 3, 0)$

   c. $z = e^x \ln(y)$ en $(3, 1, 0)$

3. Dibujen con Maple la gráfica de la función y la de su plano tangente en el punto dado. Amplíen el dibujo hasta que la gráfica de la función y el plano tangente sean indistinguibles.

   a. $f(x, y) = \dfrac{4x}{y}$ en $(1, 2, 2)$

   b. $f(x, y) = x^3 - xy$ en $(-2, 3, -2)$

   c. $f(x, y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y)$ en $(0, \pi, 0)$

4. Encuentren la aproximación lineal de las funciones de los ejercicios anteriores, centrada en los mismos puntos.

5. Encuentren el diferencial de las siguientes funciones:

   a. $f(x, y) = 2xy + y^2$

   b. $f(x, y) = \sqrt{x + y^3}$

   c. $f(x, y) = ye^x + \operatorname{sen}(x)$

6. La longitud y el ancho de un rectángulo son de 30 cm y 24 cm respectivamente, con un margen de error de medición de 0.1 en cada dimensión. Usen diferenciales para estimar el máximo error en el área calculada del rectángulo.

7. Usen diferenciales para estimar la cantidad de metal en una lata cerrada con diámetro de 8 cm y altura de 12 cm, si el material tiene un espesor de 0.04 cm.

8. Encuentren la aproximación lineal de la función $f(x, y) = \sqrt{20 - x^2 - 7y^2}$ centrada en $(2, 1)$ y úsenla para aproximar $f(1.95, 1.08)$. ¿Cómo aseguran que la aproximación es buena?

9. Encuentren un valor aproximado para los siguientes números:

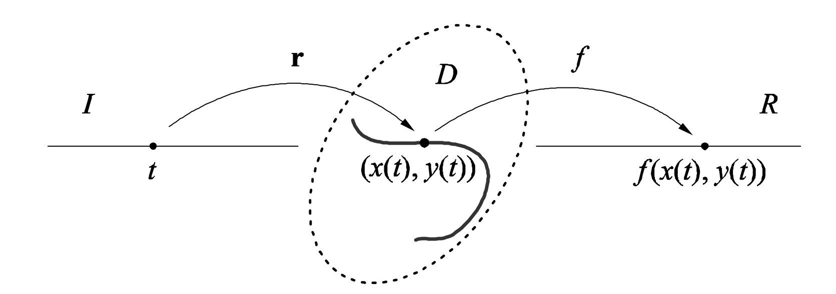
   a. $2.01 \cdot e^{-0.01}$

   b. $\ln(1.1)\sqrt{35.98}$

8.4 La regla de la cadena

Supongamos que $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t)\rangle$ es una función vectorial definida en un intervalo $I \subset \mathbf{R}$ cuyas componentes son derivables y que $f(x,y)$ es una función diferenciable en un dominio D que contiene a la imagen de $\mathbf{r}(t)$. Consideremos la función compuesta $f\circ\mathbf{r} : (f\circ\mathbf{r})(t) = f(x(t), y(t))$

Esta función tiene dominio I y sus valores son números:



Veamos un ejemplo.

EJEMPLO

En cierta región del plano, la temperatura en un punto (x,y) medida en ${}^oC$ está dada por $T(x,y) = \sqrt{x+y^2}$. Una hormiga camina por la región, y su posición en el tiempo viene dada por $\mathbf{r}(t) = \left\langle 2t, t^2-1\right\rangle$. Nos interesa saber cómo cambia la temperatura para la hormiga en un instante t. En el instante t la hormiga está en $x = 2t; y = t^2-1$, y la temperatura en ese punto es

$$(T\circ\mathbf{r})(t) = T(2t, t^2-1) = \sqrt{2t+(t^2-1)^2}$$

El cambio vendrá dado por la derivada:

$$\frac{d}{dt}(T\circ\mathbf{r}) = \frac{d}{dt}\sqrt{2t+(t^2-1)^2}$$

la cual se puede calcular según las reglas de derivación:

$$\frac{d}{dt}\sqrt{2t+(t^2-1)^2} = \frac{1+2t(t^2-1)}{\sqrt{2t+(t^2-1)^2}}$$

Otra manera de resolver la derivada anterior, es por medio de la **regla de la cadena**, que en la situación planteada dice:

$$(T\circ\mathbf{r})' = T_x\, x' + T_y\, y'$$

Para nuestro ejemplo:

$$\begin{aligned}(T\circ\mathbf{r})' &= \frac{1}{2\sqrt{x+y^2}}2 + \frac{2y}{2\sqrt{x+y^2}}2t \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+y^2}} + \frac{2yt}{\sqrt{x+y^2}}\end{aligned}$$

.

.

$$= \frac{1+2yt}{\sqrt{x+y^2}} \text{ y reemplazando:}$$
$$= \frac{1+2t(t^2-1)}{\sqrt{2t+(t^2-1)^2}}$$

lo mismo que obtuvimos antes.

Definición

El **vector gradiente** de una función de dos variables $T(x, y)$ es el vector cuyas componentes son las derivadas parciales de la función T, se lo indica ∇T (se lee "nabla te"). Esto es:

$$\nabla T(x, y) = \langle T_x(x, y), T_y(x, y) \rangle$$

Recordemos que el vector derivado de una función vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$ es:

$$\mathbf{r}'(t) = \langle x'(t), y'(t) \rangle$$

Usando esta notación la regla de la cadena puede expresarse:

$$(T \circ \mathbf{r})' = \nabla T \cdot \mathbf{r}'$$

Notar la similitud con la regla de la cadena en una variable.

EJEMPLO

El radio r de la base de un cilindro circular recto está aumentando a razón de 3 cm/min mientras que su altura h está disminuyendo a razón de 1/2 cm/min . ¿A qué razón está cambiando el volumen V del cilindro cuando $r = 4$ y $h = 8$?

El volumen del cilindro se calcula multiplicando la superficie de la base πr^2 por la altura:

$$V = \pi r^2 h$$

Tanto r como h son funciones del tiempo t, y por lo tanto el volumen también lo es. Por la regla de la cadena tenemos:

$$\frac{dV}{dt} = V_r r' + V_h h' = 2\pi r h\, r' + \pi r^2\, h' \qquad (*)$$

Tenemos que $r' = 3$ y que $h' = -1/2$. Cuando $r = 4$ y $h = 8$, reemplazando en (*) obtenemos:

$$\frac{dV}{dt} = 2\pi 4.8.3 + \pi 4^2(-1/2) = 192\pi - 8\pi = 184\pi \frac{cm^3}{\text{min}}$$

.

EJERCICIOS

1. Encuentren las derivadas $\frac{dz}{dt}$ usando la regla de la cadena en los siguientes casos. Escriban claramente todos los elementos calculados, y las operaciones involucradas.
   a. $z = \sqrt{x^2 + y}$ $\quad x(t) = t^5; y(t) = \cos t$
   b. $z = xy + y^4$ $\quad x(t) = e^t; y(t) = \frac{1}{t}$
   c. $z = x^2y - \operatorname{sen}(3x)$ $\quad x(t) = \ln t; y(t) = \cos t$
2. El largo l , el ancho s y el alto h de una caja cambian con el tiempo. En cierto instante se tiene $l = 10$, $s = 4$ y $h = 6$, y l y h aumentan a razón de 2 m/s mientras que s disminuye a razón de 1 m/s. Encuentren la razón de cambio de las siguientes magnitudes en ese instante:
   a. El volumen
   b. El área total (con tapa)
   c. La longitud de una diagonal
3. El auto A se desplaza hacia el norte por una carretera recta y el auto B viaja hacia el oeste por una ruta perpendicular a la anterior. Los dos se aproximan al cruce de las carreteras. En cierto momento el auto A está a 0.5 km del cruce, mientras que el auto B está a 0.8 km del mismo. En ese instante el auto A circula a 90km/h y el auto B lo hace a 110 km/h ¿Cuál es la razón de cambio de la distancia entre ambos autos en ese instante?
4. Una escalera de 4m de largo se apoya contra una pared y su base empieza a resbalar. Cuando la base está a 3.7 m de la casa, la base se está alejando a razón de 1.5 m/s.
   a. ¿Con qué velocidad se está deslizando el extremo de la escalera que apoya en la pared en ese mismo instante?
   b. ¿Cuál es la razón de cambio del área del triángulo formado por la escalera, la pared y el suelo en ese instante?

El vector gradiente y la derivada direccional

Hemos definido en la sección anterior al vector gradiente de una función $f(x, y)$ como:

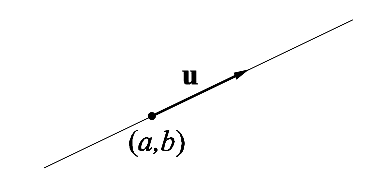
$$\nabla f(x, y) = \langle f_x(x, y), f_y(x, y)\rangle$$

Vamos a usar el vector gradiente para estudiar la variación de la función $f(x, y)$ en una dirección cualquiera. Supongamos que estamos en un punto $A(a, b)$ del dominio de $f(x, y)$, en el cual la función es diferenciable, y supongamos que tenemos una

dirección dada por un vector *unitario* $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$. La función de posición

$$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{u} + \overrightarrow{OA} = \langle tu_1 + a, tu_2 + b \rangle$$

describe un movimiento rectilíneo uniforme en la dirección de $\mathbf{u}$ con rapidez $|\mathbf{u}| = 1$.



La dirección dada por el vector unitario $\mathbf{u}$

A la función compuesta $f \circ \mathbf{r}$ podemos calcularle su derivada respecto de t usando la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dt}(f \circ \mathbf{r}) = \nabla f \cdot \mathbf{r}' = \nabla f \cdot \mathbf{u}$$

En particular, para $t = 0$, se tiene que $\mathbf{r}(0) = \langle a, b \rangle$ y la expresión anterior queda:

$$\frac{d}{dt}(f \circ \mathbf{r})\Big|_{t=0} = \nabla f(a,b) \cdot \mathbf{r}'(0) = \nabla f(a,b) \cdot \mathbf{u}$$

Damos la siguiente definición:

Definición

Supongamos que $f(x,y)$ es diferenciable en (a,b). Llamamos **derivada direccional** de $f(x,y)$ en (a,b) en la dirección del vector unitario $\mathbf{u}$ al número:

$$D_{\mathbf{u}} f(a,b) = \nabla f(a,b) \cdot \mathbf{u}$$

EJEMPLO

Calculemos la derivada direccional de la función $f(x,y) = y\ln(x)$ en la dirección definida por el vector $\langle 1, 1 \rangle$ en el punto $(e, 1)$.

Observando que la función es diferenciable en el punto (¿por qué?), hacemos los cálculos necesarios:

1. Calculamos el gradiente de la función en el punto dado:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{y}{x} \\ f_x(e,1) &= \frac{1}{e} \\ f_y(x,y) &= \ln(x) \\ f_y(e,1) &= 1 \end{aligned}$$

   en consecuencia:

$$\nabla f\,(e,1) = \left\langle \frac{1}{e}, 1 \right\rangle$$

2. El vector unitario en la dirección dada es:

$$\mathbf{u} = \frac{\langle 1,1 \rangle}{|\langle 1,1 \rangle|} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$$

3. Calculamos ahora la derivada direccional:

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(e,1) &= \nabla f\,(e,1)\cdot\mathbf{u} \\ &= \left\langle \frac{1}{e},1\right\rangle \cdot \left\langle \tfrac{1}{\sqrt{2}},\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle \\ &= \frac{1}{e\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}} \\ &\simeq 0.967\,24 \end{aligned}$$

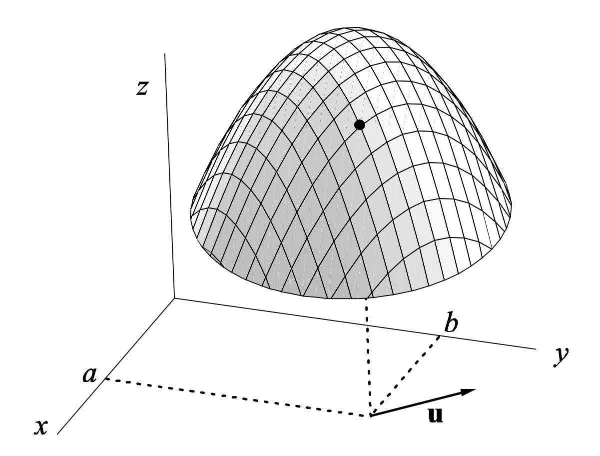
EJERCICIOS

Consideren el caso en el que el vector unitario $\mathbf{u}$, es respectivamente uno de los versores $\mathbf{i}$ ó $\mathbf{j}$. Muestren que:

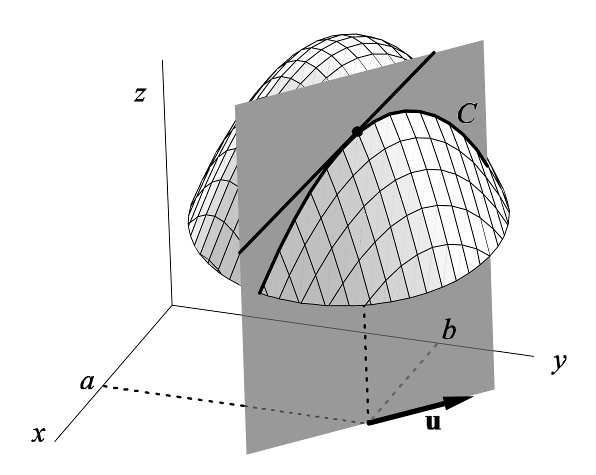
1. $D_{\mathbf{i}}f(a,b) = f_x(a,b)$
2. $D_{\mathbf{j}}f(a,b) = f_y(a,b)$

Interpretación geométrica de la derivada direccional

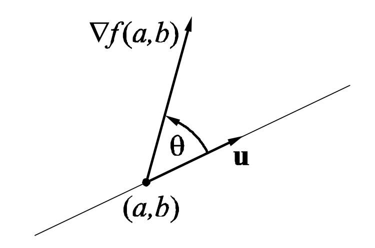
En el dibujo de abajo mostramos un vector unitario $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2\rangle$ en el plano xy, y la gráfica de una función $f(x,y)$ que es diferenciable en el punto (a,b).



El plano paralelo al eje z que pasa por (a,b) y contiene al vector $\mathbf{u}$ corta a la gráfica en una curva C. La derivada direccional $D_{\mathbf{u}}f(a,b)$ puede interpretarse como la pendiente de la recta tangente a la curva C por el punto $(a,b,f(a,b))$ en ese plano.



Dirección de máximo crecimiento



El ángulo θ entre los vectores $\nabla f(a,b)$ y $\mathbf{u}$

Recordando que $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = |\mathbf{v}|\ \ |\mathbf{w}|\ \ \cos\theta$ la derivada direccional puede escribirse, usando que $|\mathbf{u}| = 1$:

$$D_{\mathbf{u}}f(a,b) = |\nabla f(a,b)|\ \ |\mathbf{u}|\ \ \cos\theta = |\nabla f(a,b)|\ \ \cos\theta$$

donde θ es el ángulo entre $\nabla f(a,b)$ y $\mathbf{u}$.

De la expresión anterior deducimos que la derivada direccional tendrá un valor máximo cuando $\cos\theta = 1$, lo que ocurre cuando $\theta = 0$, es decir cuando $\mathbf{u}$ y $\nabla f(a,b)$ tienen la misma dirección. En tal caso, tendremos:

$$D_{\mathbf{u}}f(a,b) = |\nabla f(a,b)|$$

Esto lo podemos expresar de la siguiente manera:

Teorema

Si $f(x,y)$ es diferenciable en (a,b) la dirección de máximo crecimiento de f en (a,b) está dada por la dirección del gradiente de f en (a,b). Además, la máxima razón de cambio es $|\nabla f(a,b)|$.

EJERCICIOS

Supongan que $f(x,y)$ es diferenciable en (a,b). ¿Cuál será la dirección de máximo decrecimiento de la función en (a,b)? ¿Cuánto valdrá la razón de cambio en esa dirección?

Observación: Todo lo dicho en este apartado y el anterior para funciones de dos variables es aplicable a funciones de tres o más variables.

EJEMPLO

Encontremos la dirección de máximo crecimiento de la función $f(x,y,z) = 4x^2yz^3$

en el punto $(1, 2, 1)$ y determinemos la razón de cambio máxima y mínima en ese punto.

En primer lugar, notemos que f por ser polinómica es diferenciable en todo su dominio. Como vimos, la dirección de máximo crecimiento está dada por el vector $\nabla f(1, 2, 1)$. Lo calculamos:

$$\begin{aligned} f_x(1,2,1) &= 8xyz^3\big|_{(1,2,1)} = 16 \\ f_y(1,2,1) &= 4x^2z^3\big|_{(1,2,1)} = 4 \\ f_z(1,2,1) &= 12x^2yz^2\big|_{(1,2,1)} = 24 \\ \nabla f(1,2,1) &= \langle 16, 4, 24\rangle \quad \text{es la dirección de máximo crecimiento.} \end{aligned}$$

La derivada direccional en ese punto en la dirección del vector unitario correspondiente es:

$$D_{\mathbf{u}}f(1,2,1) = |\nabla f(1,2,1)| = \sqrt{16^2 + 4^2 + 24^2} = 4\sqrt{53}$$

Análogamente, la razón de cambio mínima estará dada por $-|\nabla f(1, 2, 1)| = -4\sqrt{53}$

.

ACTIVIDAD

Un barco navega en dirección noroeste a $23km/h$. Se conoce que la temperatura ambiente aumenta a razón de $1^oC/km$ en la dirección norte y disminuye a razón de $2^oC/km$ en la dirección oeste.

1. ¿Cómo haríamos para calcular la razón de cambio de la temperatura en la dirección del barco?

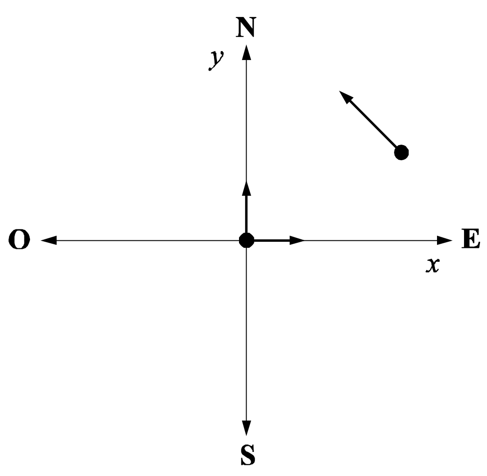
   Evidentemente, se trata de calcular una derivada direccional. Al margen hicimos un esquema orientador. Llamemos $T(x, y)$ a la temperatura ambiente en la posición (x, y). Si $\mathbf{u}$ es un vector unitario que da la dirección del barco, la razón de cambio que buscamos será:

   $$D_{\mathbf{u}}T = \nabla T \cdot \mathbf{u}$$

   a. De acuerdo a nuestro esquema, un vector en la dirección del barco es $\langle -1, 1\rangle$. Encuentren un vector unitario $\mathbf{u}$ para la dirección del barco.

   b. Calculemos el gradiente. Sabemos que en la dirección Norte la temperatura aumenta a razón de $1^oC/km$. ¿Qué podemos afirmar sobre T_y? De la misma manera, la temperatura disminuye en la dirección Oeste a razón de $2^oC/km$ ¿Qué nos dice ésto sobre T_x?

   c. Den el valor de la razón de cambio de la temperatura en la dirección del barco.



Ubicamos los puntos cardinales en la forma usual y dibujamos un vector en la dirección del barco.

2. Otra pregunta que podemos hacernos es: ¿cuál será la razón de cambio de la temperatura ambiente para alguien que está en el barco?

   a. Discutan cuál es la diferencia entre esta pregunta y la que nos hicimos en el punto 1.

b. Si llamamos $\mathbf{r}(t)$ a la función de posición del barco ¿qué representa $\mathbf{r}'(t)$? ¿cuánto vale?

c. ¿Cómo expresarían a la temperatura sobre el barco en función del tiempo t?

d. ¿Cuál es la derivada que se debe calcular para responder a la pregunta? Háganlo.

EJERCICIOS

1. Encuentren la razón de cambio de f en el punto P en la dirección del vector que se indica:

   a. $f(x, y) = y \ln x \qquad P(1, -3) \qquad \mathbf{u} = \langle -4/5, 3/5 \rangle$

   b. $f(x, y) = 1 + 2x\sqrt{y} \qquad P(3, 4) \qquad \mathbf{u} = \langle -\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2 \rangle$

2. Encuentren la derivada direccional de la función f en el punto dado y en la dirección indicada por el ángulo α:

   a. $f(x, y) = xe^{-2y} \qquad (5, 0) \qquad \alpha = \pi/2$

   b. $f(x, y) = \sqrt{5x - 4y} \qquad (4, 1) \qquad \alpha = -\pi/6$

   c. $f(x, y) = \operatorname{sen}(x + 2y) \qquad (4, -2) \qquad \alpha = 3\pi/4$

3. Hallen la derivada de la función que se indica en el punto dado y en la dirección del vector $\mathbf{v}$:

   a. $f(x, y) = x/y \qquad (6, 2) \qquad \mathbf{v} = \langle -1, 3 \rangle$

   b. $f(r, \theta) = e^{-r} \operatorname{sen} \theta \qquad (0, \pi/3) \qquad \mathbf{v} = \langle -2, 1 \rangle$

   c. $g(s, t) = s/s + t \qquad (2, 2) \qquad \mathbf{v} = \langle -1, 1 \rangle$

4. Encuentren la máxima razón de cambio de $f(x, y)$ en el punto dado e indiquen la dirección en la que la misma se verifica:

   a. $f(x, y) = xe^{-y} + 3y \qquad (1, 0)$

   b. $f(x, y) = \operatorname{sen}(xy) \qquad (0, 1)$

   c. $f(x, y, z) = x + \dfrac{y}{z} \qquad (4, 3, -1)$

5. Encuentren las direcciones en las cuales la derivada direccional de $f(x, y) = x^2 + \operatorname{sen}(xy)$ en el punto $(1, 0)$ tiene el valor 1.

6. Supongan que la temperatura en el punto de coordenadas (x, y, z) viene dada por la función $T(x, y, z) = 12 + (1 - \dfrac{z}{100})e^{-(x^2 - y^2)}$. Encuentren la dirección de máximo decrecimiento de T en el punto $(2, 0, 99)$.

7. Sea $T(x, y) = \dfrac{4}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ la temperatura en una región del plano. Suponga que Ud. está en el punto de coordenadas (2,1).

a. Dibuje los puntos del plano que están a la misma temperatura que Ud.

b. ¿En qué dirección tendría que desplazarse para estar aproximadamente a la misma temperatura? Explique.

c. Si Ud. quisiera moverse hacia un clima más frío lo más rápido posible ¿en que dirección debería moverse? Explique.

8. Calculen la derivada direccional de la función $f(x, y) = y^{3x}$en el punto (1,2) en la dirección que va desde ese punto al punto (2,3).

9. Supongan que la elevación de una colina está dada por $f(x, y) = 200 - y^2 - 4x^2$. Desde el lugar situado sobre el punto (1,2) ¿En qué dirección correrá el agua de lluvia?

Planos tangentes a superficies de nivel

Sea $f(x, y)$ una función diferenciable y consideremos un punto (a, b) de su dominio. Llamemos $k = f(a, b)$. Entonces la curva C dada implícitamente por:

$$f(x, y) = k$$

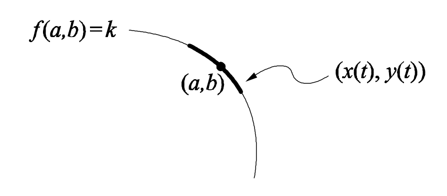


Figura 1. Parametrizamos un trozo de la curva $F(x, y) = k$ por medio de $(x(t), y(t))$.

es la curva de nivel de $f(x, y)$ que pasa por (a, b). Supondremos además que nos es posible parametrizar un trozo de la curva C que contenga al punto (a, b)[5], digamos:

$$C : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in I$$

y además, para algún $t_0 \in I$ tendremos $x(t_0) = a$ e $y(t_0) = b$ (ver Figura 1 al margen).

Para cualquier $t \in I$, el punto $(x(t), y(t)) \in C$, y por lo tanto la función

$$g(t) = f(x(t), y(t)) = k$$

es constante en I. Por consiguiente la derivada $g'(t) = 0$. Pero usando la regla de la cadena:

$$g'(t) = \frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = f_x\, x' + f_y\, y' = \nabla f \cdot \langle x', y' \rangle = 0$$

en particular, para $t = t_0$ tendremos:

$$\nabla f(a, b) \cdot \langle x'(t_0), y'(t_0) \rangle = 0$$

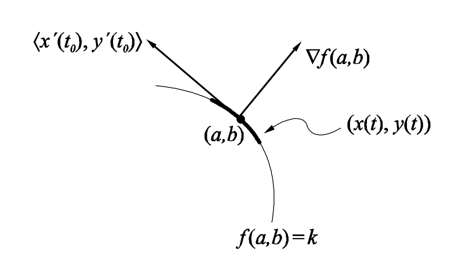


Figura 2. El vector gradiente $\nabla f(a, b)$ y el vector tangente $\langle x'(t_0), y'(t_0) \rangle$ son ortogonales.

lo cual nos dice que el vector gradiente es ortogonal al vector $\langle x'(t_0), y'(t_0) \rangle$ que es tangente a la curva C en el punto (a, b).

Lo enunciamos

.

[5] La condición para que exista una parametrización como la que usamos es justamente que $\nabla f(a, b) \neq 0$. Se puede encontrar una demostración en los libros de Cálculo avanzado como consecuencia del llamado Teorema de la función implícita,

Teorema

Si (a,b) es un punto en el dominio de una función diferenciable $f(x,y)$ el vector gradiente de f en (a,b) es ortogonal a la curva de nivel de f que pasa por (a,b).

Lo mismo vale para una superficie de nivel de una función de tres variables $f(x,y,z)$:

Teorema

Si (a,b,c) es un punto en el dominio de una función diferenciable $F(x,y,z)$ el vector gradiente de F en (a,b,c) es ortogonal a la superficie de nivel de F que pasa por (a,b,c).

EJEMPLO

Consideremos la superficie S dada implícitamente por $4x^2+2y^2+5z=17$ y el punto P(0,-1,3) $\in S$. Daremos la ecuación del plano tangente a S por el punto P. Para ello consideramos la función de tres variables

$$F(x,y,z)=4x^2+2y^2+5z$$

de modo que la superficie S puede verse como la superficie de nivel 17 de la función F. De acuerdo al resultado anterior, el vector gradiente:

$$\nabla F(0,-1,3)=\langle F_x,F_y,F_z\rangle\,\Big|_{(0,-1,3)}$$

es normal al plano tangente en el punto correspondiente. Las derivadas parciales son:

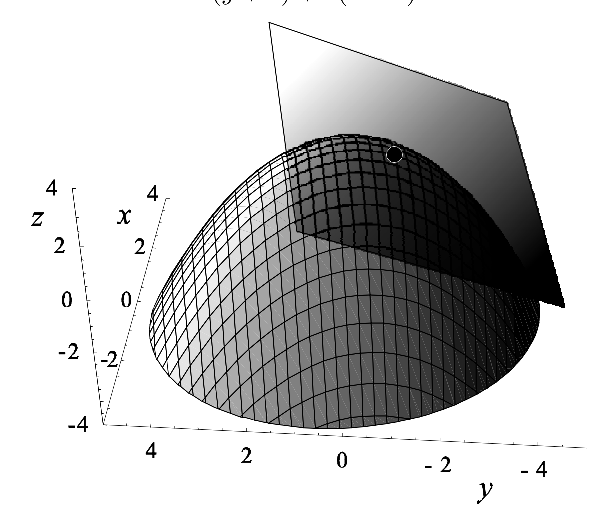
$$F_x=8x \quad ; \quad F_y=4y \quad ; \quad F_z=5$$

Por lo tanto:

$$\nabla F(0,-1,3)=\langle 0,-4,5\rangle$$

y la ecuación del plano:

$$\begin{aligned}\langle 0,-4,5\rangle\cdot\langle x,y+1,z-3\rangle &= 0\\ -4(y+1)+5(z-3) &= 0\end{aligned}$$



EJERCICIOS

1. Encuentren la ecuación del plano tangente a la superficie por el punto que se indica:
   a. $z = x^2 + y^2 \qquad (1, -1, 2)$
   b. $x^2 + y^2 + z^2 = 6 \qquad (-1, 2, 1)$
   c. $xe^{yz} = 1 \qquad (1, 0, 5)$
2. Encuentren los puntos del elipsoide $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ en los cuales el plano tangente es paralelo al plano de ecuación $3x - y + 3z = 1$.
3. Sea C la curva definida por la intersección del paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el elipsoide $4x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Encuentren la ecuación de la recta tangente a C por el punto $(-1, 1, 2)$.
4. El plano $x + z = 2$ corta al cilindro $x^2 + y^2 = 5$ en una elipse. Encuentren las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a esa elipse en el punto $(1, 2, 1)$. Use Maple para dibujar al plano, el cilindro y la recta tangente en una misma gráfica.
5. Muestre que todo plano que sea tangente al cono $x^2 + y^2 = z^2$ pasa por el origen.
6. Muestre que toda recta normal a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ pasa por el centro de la esfera.

Funciones implícitas

En algunas situaciones la relación entre dos o más magnitudes no está dada en forma explícita sino por medio de una ecuación que las mismas satisfacen. Supongamos, por ejemplo que las variables x e y están vinculadas por una ecuación del tipo:

$$F(x, y) = 0 \qquad (*)$$

si nos fuera posible "despejar" una de las variables se obtendría una relación funcional

$$y = y(x) \qquad (**)$$

y derivándola se encontraría la razón de cambio de y respecto de x

$$y' = y'(x)$$

Lamentablemente en la mayoría de los casos no podremos encontrar la expresión explícita de $y(x)$.

Otra forma de hacerlo -que tiene muchas ventajas- es notar que *si existiera* una relación funcional como la (**) podríamos sustituirla en la ecuación (*) obteniendo la identidad:

$$F(x, y(x)) \equiv 0$$

válida en el dominio de $y(x)$.

.

Si derivamos esta última identidad respecto de x usando la regla de la cadena tendremos:

$$\frac{d\,F(x,y(x))}{dx} = F_x.x' + F_y.y' = F_x + F_y.y' = 0$$

de donde resulta (suponiendo que $F_y \neq 0$):

$$y' = \frac{-F_x}{F_y} \qquad (***)$$

lo cual es muy conveniente, puesto que nos permite conocer la derivada y' a partir de las derivadas parciales de $F(x,y)$.

El **Teorema de la función implícita**, cuya demostración no daremos en este curso, afirma que:

Teorema

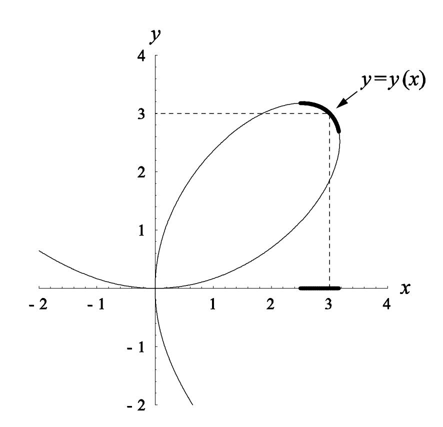
Si $F(x,y)$ está definida en un disco D que contiene a un punto (a,b) y se cumple que:

1. $F(a,b) = 0$

2. F_x y F_y son continuas en el disco D y $F_y(a,b) \neq 0$

Entonces la ecuación $F(x,y) = 0$ define a y como función de x cerca del punto (a,b) y la derivada de esta función está dada por la ecuación (***).

EJEMPLO



Sobre un intervalo alrededor de $x = 3$ un sector de la curva (que pasa por $y = 3$) puede verse como la gráfica de una función $y = y(x)$.

Supongamos que C es la curva definida por la ecuación $x^3 + y^3 = 6xy$, y consideramos sobre C al punto $(3,3)$:

Observando la gráfica, vemos que en el intervalo I alrededor de $x = 3$ es posible ver a un tramo de C como la gráfica de una función (que desconocemos) $y = y(x)$ para la cual $y(3) = 3$. No es posible, en general, explicitar a $y(x)$.

Sin embargo, haciendo $F(x,y) = x^3 + y^3 - 6xy$, nuestra curva estará definida por la ecuación $F(x,y) = 0$, y verificando las hipótesis del Teorema de la función implícita para $(a,b) = (3,3)$ tendremos que, cerca de $x = 3$ nuestra ecuación define a y como función de x, y su derivada es:

$$y' = -\frac{F_x}{F_y}$$

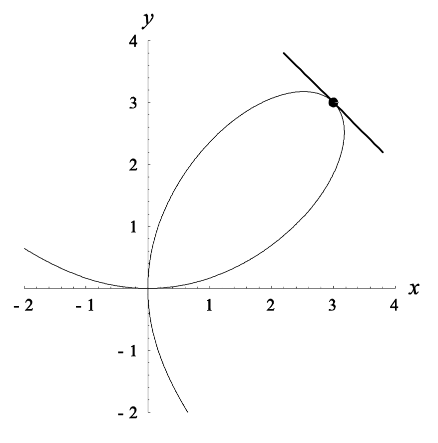
$$y' = -\frac{3x^2 - 6y}{3y^2 - 6x}$$

siempre que $3y^2 - 6x \neq 0$.

En el punto $(3,3)$ será:

$$y'(3) = -\frac{3.3^2 - 6.3}{3.3^2 - 6.3} = -1$$

La recta de pendiente -1 que pasa por $(3,3)$ debería ser tangente a la curva C. Su ecuación es $y - 3 = -(x-3)$.



La recta $y - 3 = -(x-3)$ es tangente a la curva por el punto $(3,3)$.

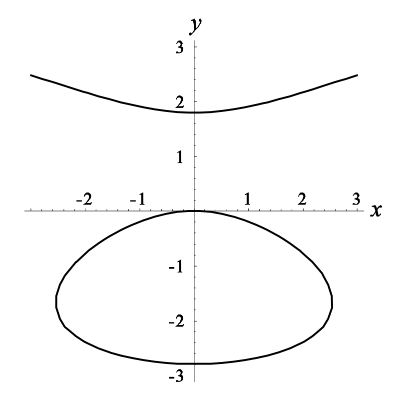
EJERCICIOS

1. En relación al ejemplo anterior, otra manera de encontrar la recta tangente es el de la curva de nivel descripto en la página 218. Encuentren un vector normal a la curva C y úsenlo para dar una ecuación de la recta tangente por el punto $(3,3)$. Comparen con lo obtenido en el ejemplo.

2. Encuentren y' en los siguientes casos:
   a. $x^2 - xy + y^2 = 8$
   b. $\cos(x-y) = xe^y$
   c. $xy + y^2 = 2$
   d. $\sqrt{xy} = y^2$

3. En relación al ejemplo hemos obtenido
$$y' = -\frac{3x^2 - 6y}{3y^2 - 6x}$$
   En vista del denominador presente, se ve que esa expresión puede no ser válida para todos los puntos de C.
   a. Encuentren los puntos (x,y) de la curva C para los cuales el denominador de la expresión anterior se anula, y por lo tanto no se satisface en esos puntos una de las hipótesis del Teorema de la función implícita. (¿cuál?).
   b. Ubique esos puntos en la gráfica de C, y dé razones por las cuales la función $y(x)$ no puede existir.

4. El dibujo es la gráfica de la curva dada implícitamente por la ecuación $y^3 + y^2 - 5y - x^2 = 0$.



   a. Marquen en la gráfica los puntos sobre la curva en los cuales la recta tan-

gente es horizontal.

b. Lo mismo para tangente vertical.

c. Corroboren en forma analítica lo que encontraron en los incisos anteriores.

Capítulo 9

Optimización

Retomemos aquí el problema planteado en la primera actividad de este curso (ver página 9). Allí se trataba de encontrar las dimensiones de un depósito de base cuadrada, sin tapa, cuyo volumen fuera 36 m^3. El análisis hecho en esa oportunidad nos condujo a considerar la función:

$$S(l) = l^2 + \frac{144}{l} \text{ para } l > 0$$

la cual expresaba la superficie del depósito en función de la longitud l del lado de la base. El problema planteado consistía en hallar el valor de l de manera que hiciera que $S(l)$ fuera el menor posible. Si estudiamos los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función en su dominio, tenemos:

$$S'(l) = 2l - \frac{144}{l^2}$$

que se anula para $l^3 = 72$, es decir para $l = \sqrt[3]{72}$ que es el único punto crítico.

Entonces tenemos el siguiente comportamiento:

	$(0, \sqrt[3]{72})$	$\sqrt[3]{72}$	$(\sqrt[3]{72}, +\infty)$
S'	$-$		$+$
S	$\downarrow$	mínimo	$\uparrow$

De manera que para $l = \sqrt[3]{72}$ se obtendrá el mínimo valor para $S(l)$:

$$S(\sqrt[3]{72}) = \left(\sqrt[3]{72}\right)^2 + \frac{144}{\sqrt[3]{72}} \simeq 51.921...$$

En este capítulo trataremos el problema de encontrar, dada una función f, sus valores máximos y mínimos en un conjunto C dado, y los puntos de C en los cuales se alcanzan esos valores. Comenzaremos estudiando la situación para funciones numéricas de una variable, para luego considerar funciones de varias variables.

Damos una definición:

Definición

Sea $f(x)$ una función numérica. Consideremos un subconjunto C del dominio de f, y sea $x_0 \in C$. Diremos que:

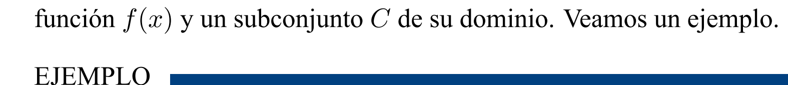
1. $f(x)$ alcanza en x_0 un **máximo absoluto en** C si $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x \in C$

2. $f(x)$ alcanza en x_0 un **mínimo absoluto en** C si $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in C$

3. $f(x)$ alcanza en x_0 un **extremo absoluto en** C si alcanza en x_0 un máximo absoluto o un mínimo absoluto.

La primera cuestión a tener en cuenta es la existencia de extremos absolutos para una

función $f(x)$ y un subconjunto C de su dominio. Veamos un ejemplo.



Consideremos la función $f(x) = x - 3 + \dfrac{4}{x}$ para $x > 0$.

1. En la Figura 1, vemos que si C es el intervalo $(0, +\infty)$ $f(x)$ no alcanza un máximo absoluto, pero sí un mínimo absoluto.
2. En $C = (2, +\infty)$ la función no alcanza un mínimo absoluto ni tampoco un máximo absoluto, tal como vemos en la Figura 2.
3. Si C es el intervalo cerrado $[1, 5]$ la función alcanza un máximo absoluto en $x = 5$ y un mínimo absoluto en $x = 2$, como muestra la Figura 3.

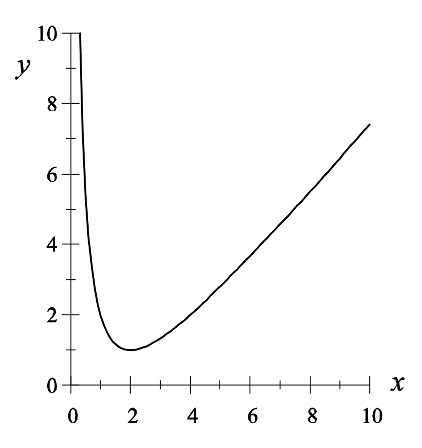


Figura 1. En $C = (0, +\infty)$ la función alcanza un mínimo absoluto, pero no alcanza un máximo absoluto.

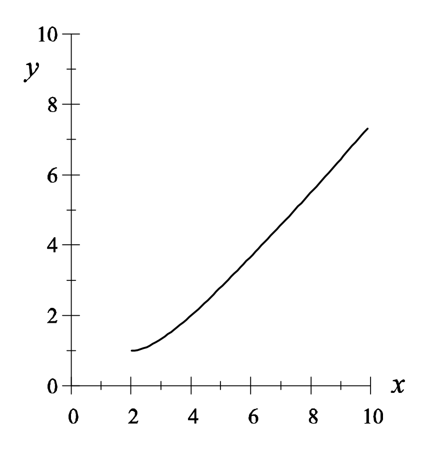


Figura 2. En $C = (2, +\infty)$ la función no alcanza un mínimo absoluto ni tampoco un máximo.absoluto.

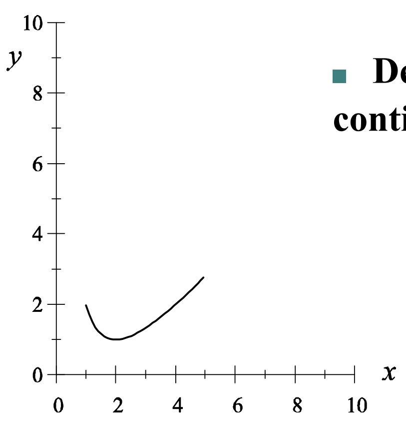


Figura 3. En $C = [1, 5]$ la función alcanza un mínimo absoluto y un máximo absoluto.

El ejemplo nos muestra que la existencia de extremos absolutos en un subconjunto C del dominio depende de cuál sea el conjunto C que estemos considerando, además del comportamiento de la función.

Se tiene el siguiente teorema, que no demostraremos en este curso:

Teorema

Sea $f(x)$ una función definida en un dominio D. Si $I = [a, b]$ es un **intervalo cerrado** contenido en D tal que $f(x)$ **es continua en** I entonces $f(x)$ alcanza un mínimo absoluto y un máximo absoluto en I.[6]

Observación: Notemos que el teorema solamente asegura la *existencia* de extremos absolutos, pero no dice en qué puntos se alcanzan, ni tampoco cómo encontrarlos.

Determinación de los extremos absolutos de una función continua en un intervalo cerrado

Supongamos que $f(x)$ es una función continua en un intervalo cerrado $I = [a, b]$. Para determinar sus extremos absolutos lo que haremos es construir una lista de candidatos para luego identificar los extremos evaluando la función en los números de la lista y comparando los valores que toma la función en ellos.

Supongamos que en $x = c$ hay un extremo y supongamos además que c es interior al intervalo, es decir $c \in (a, b)$. Entonces c es un extremo local de $f(x)$ y por lo tanto es un *número crítico* (ver página 87), es decir:

[6] Recordemos que una función es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ si es continua en todo punto del intervalo abierto (a, b) y los límites laterales para $x \to a^+$ y para $x \to b^-$ son iguales a $f(a)$ y a $f(b)$ respectivamente.

- $f(x)$ es derivable en $x = c$ y $f'(c) = 0$ o bien:
- $f(x)$ no es derivable en c

Si c no es interior al intervalo, entonces es uno de los extremos, o sea $c = a$ o $c = b$,

Resumiendo:

Los extremos absolutos de una función continua en un intervalo cerrado se alcanzan en los números críticos o en los extremos del intervalo

Veamos un ejemplo.

EJEMPLO

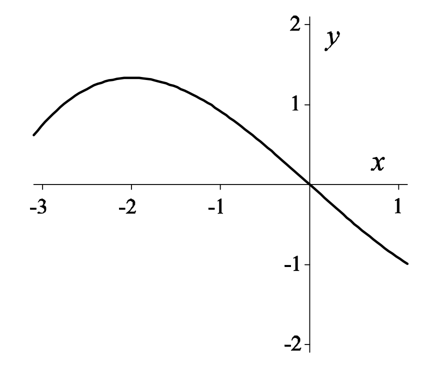
Encontrar los extremos absolutos de la función $f(x) = \dfrac{x^3}{12} - x$ en el intervalo $[-3, 1]$.

Paso 1 Comprobamos la continuidad: Puesto que f es un polinomio, es continua en toda la recta.

Paso 2 Encontramos los números críticos en el intervalo: Puesto que la función es derivable en todo su dominio, sólo habrá números críticos provenientes de la anulación de la derivada. Resolvemos:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{4} - 1 &= 0 \\ x^2 &= 2 \\ x &= \pm 2 \end{aligned}$$

Observamos que $x = 2$ no pertenece al intervalo que estamos considerando, y por lo tanto lo descartamos.



Mínimo absoluto en $x = 1$ y máximo absoluto en $x = -2$.

Paso 3 Determinación de los extremos Nuestra lista de candidatos es entonces:

$$x = -2 \quad \text{número crítico}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3 \end{array}\right\} \text{extremos del intervalo}$$

Evaluamos a la función en los candidatos:

	$x = 1$	$x = -3$	$x = -2$
$f(x) = x^3/12 - x$	$-11/12$	$3/4$	$4/3$
extremos	mínimo absoluto		máximo absoluto

La gráfica confirma nuestro resultado (ver al margen).

.

Veamos ahora otro ejemplo, en el cual aparece un punto donde la derivabilidad es dudosa.

EJEMPLO

Analicemos si la función:

$$f(x) = \begin{cases} (x-2)^2 - 1 & \text{si } x \leq 13/4 \\ (x-4)^2 & \text{si } x > 13/4 \end{cases}$$

tiene extremos absolutos en el intervalo $[1, 7/2]$ y en caso afirmativo en qué números los alcanza. Seguimos los pasos del ejemplo anterior:

Paso 1 Continuidad Puesto que la función está definida por dos trozos polinomiales, sólo debemos comprobar la continuidad en el punto de "pegado" $x = 13/4$. Lo hacemos por medio de los límites laterales:

$$\lim_{x \to 13/4^+} f(x) = \lim_{x \to 13/4} (x-4)^2 = \frac{9}{16}$$

$$\lim_{x \to 13/4^-} f(x) = \lim_{x \to 13/4} (x-2)^2 - 1 = \frac{9}{16}$$

ambos límites existen, son iguales y coinciden con el valor $f(13/4)$. Por lo tanto f es continua en el intervalo dado.

La función es continua y el intervalo cerrado, de modo que hay extremos absolutos en el intervalo.

Paso 2 Números críticos Excepto en el punto de pegado, la función es derivable, y se tiene:

$$f'(x) = \begin{cases} 2(x-2) & \text{si } x < 13/4 \\ 2(x-4) & \text{si } x > 13/4 \end{cases}$$

Todavía no decimos nada sobre la derivada en $x = 13/4$.

Los números críticos son $x = 2$ y $x = 4$; a éste último lo descartamos por no pertenecer al intervalo $[13/4, 7/2]$.

Respecto de $x = 13/4$ podemos hacer una de dos cosas:

- Considerarlo sospechoso y agregarlo a la lista *por las dudas* que fuera crítico.
- Ver si la función es derivable en 13/4 y agregar el número a la lista en caso de que la derivada no exista o en caso de que la derivada exista y sea 0.

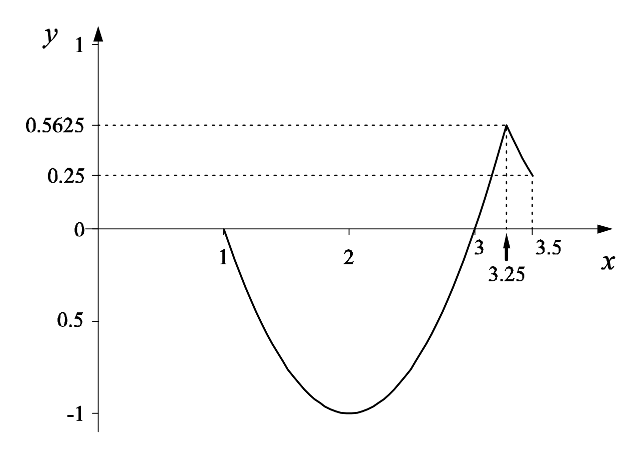
Aquí seguiremos el primer camino (Uds. pueden comprobar que la función no es derivable en 13/4 ¡hacerlo!). Nuestra lista queda:

	$x = 2$	$x = 13/4$	1	7/2
$f(x)$	-1	$9/16$	0	$1/4$
	mínimo	máximo		

Podemos responder que el valor máximo de $f(x)$ en el intervalo es 9/16 y lo alcanza

en 13/4 y que el valor mínimo de $f(x)$ en el intervalo es -1 y lo alcanza en 2.

Una gráfica confirma nuestros resultados:



EJERCICIOS

Determinen los valores máximos y mínimos de las funciones siguientes en los intervalos que se indican.

1. $f(x) = (x-2)^2 - 4$ en $[0,5]$
2. $f(x) = 1/x + 1$ en $[1,3]$
3. $f(x) = \begin{cases} (2-x)^2 - 4 & \text{si } x \leq 5 \\ 10 - x & \text{si } x > 5 \end{cases}$ en $[1,6]$
4. $f(x) = \begin{cases} (x-2)^2 - 4 & \text{si } x \leq 4 \\ (x-6)^2 - 4 & \text{si } x > 4 \end{cases}$ en $[0,8]$

Problemas de optimización en una variable

En esta sección aplicaremos lo que se ha visto a la resolución de situaciones problemáticas en las que se trata de obtener soluciones "óptimas".

EJEMPLO

Se quiere construir una caja sin tapa a partir de una lámina de cartón cuadrada de 48 cm de lado, recortando un cuadrado igual en cada esquina de la lámina y plegando hacia arriba los lados. ¿Cuál es la caja de mayor volumen que puede construirse en esta forma?

Para resolver este problema (y muchos otros) hay dos tareas:

1. **Modelizar la situación**: esto significa llevar la situación "real" del enunciado a un problema matemático cuya solución nos lleve a encontrar la respuesta al problema original. La modelización incluye los siguientes pasos:

a. **Comprender el problema**: leer cuidadosamente el enunciado ¿cuál es la cantidad a conocer? ¿cuáles son las cantidades dadas? ¿qué condiciones vinculan a las cantidades?

b. **Dibujar un esquema** de la situación señalando en él las cantidades dadas y las pedidas.

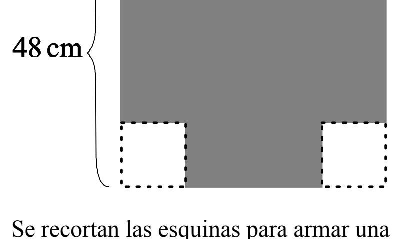
c. **Introducir notación:** asignar un nombre a la cantidad a maximizar o minimizar, y a las otras cantidades que intervienen.

d. Si Q es la cantidad a maximizar o minimizar, expresar a Q en función de las otras cantidades. Usar las relaciones para que Q finalmente dependa de una única variable, digamos $Q = Q(x)$. Escribir el dominio de $Q(x)$ teniendo en cuenta el contexto del problema.

De esta forma nuestro problema original estará modelado por el problema matemático siguiente:

"Encuentre el máximo (o el mínimo) de la función $Q(x)$ en el dominio D."

2. **Resolver el problema matemático** para obtener las soluciones del problema original.



Se recortan las esquinas para armar una caja.

Apliquemos estos pasos al problema del enunciado. Primero hacemos un dibujo (ver figura al margen).

La cantidad a conocer es el volumen de la caja, llamémoslo V, que depende de la superficie de la base y de la altura de la caja. Estas dos cantidades estarán definidas una vez que sepamos el tamaño del cuadrado que recortaremos en ambas esquinas. Llamemos x al lado del cuadrado a recortar. Entonces quedan las relaciones:

$$\begin{aligned} \text{lado de la base} &= 48 - 2x \\ \text{altura} &= x \\ V(x) &= x(48 - 2x)^2 \end{aligned}$$

El domino de $V(x)$ es el intervalo $(0, 24)$.

Hemos modelizado la situación planteada. Su solución equivale a resolver el siguiente problema matemático:

Encontrar el máximo valor de $V(x) = x(48 - 2x)^2$ en el intervalo $(0, 24)$.

Este problema no es del tipo planteado en la sección anterior, puesto que el dominio no es un intervalo cerrado. Sin embargo, notando que la función $x(48 - 2x)^2$ está definida en 0 y en 24, y que en ambos números toma el valor 0, resolver nuestro problema equivale a resolver el siguiente:

Encontrar el máximo valor de $V(x) = x(48 - 2x)^2$ en el intervalo $[0, 24]$.

EJERCICIOS

Resuelvan el problema anterior y den la respuesta al problema original.

Veamos otro ejemplo.

EJEMPLO

Un trozo de alambre de 10 m de largo se corta en dos partes. Con una se forma un triángulo equilátero y con la otra un cuadrado. ¿Cómo debe cortarse el alambre para que el área encerrada sea mínima?

1. **Modelización**

   Bueno, acá el enunciado es suficientemente claro. Supongamos que dividimos el alambre en un trozo de x metros y otro de $10 - x$ metros. El cuadrado C tendrá perímetro x, mientras que el triángulo T tendrá perímetro $10 - x$. Los lados respectivos serán: $x/4$ y $(10-x)/3$. El área de C es $x^2/16$ mientras que el área del triángulo es $(10-x)^2\sqrt{3}/36$ [7]. El área total resulta ser:

   $$A(x) = \frac{x^2}{16} + (10-x)^2\sqrt{3}/36$$

   Y el dominio en el contexto del problema es el intervalo $I = [0, 10]$. Hemos concluído la modelización de nuestro problema. La solución del mismo vendrá de encontrar el mínimo y el máximo de $A(x)$ en el intervalo I.

2. **Resolución del problema matemático**

   $A(x)$ es continua y derivable en todo su dominio. Como I es cerrado $A(x)$ alcanza un valor máximo y un valor mínimo en I; y lo hace o bien en número crítico o bien en los extremos de I. Tenemos:

   $$\begin{aligned} A'(x) &= x/8 - 2(10-x)\sqrt{3}/36 \\ &= x/8 - 20\sqrt{3}/36 + 2x\sqrt{3}/36 \\ &= \frac{9x - 40\sqrt{3} + 4x\sqrt{3}}{72} \\ &= \frac{(9+4\sqrt{3})x - 40\sqrt{3}}{72} \end{aligned}$$

   que se anula para:

   $$x = \frac{40\sqrt{3}}{9+4\sqrt{3}} \simeq 4.3496$$

   Evaluamos la función en el número crítico y en los extremos de I:

	0	10	4.34
$A(x) = \frac{x^2}{16} + (10-x)^2\frac{\sqrt{3}}{36}$	$100\frac{\sqrt{3}}{36} \simeq 4.81$	$\frac{100}{16} = 6.25$	$\simeq 2.71$
extremos		máximo	mínimo

[7] El triángulo es equilátero, y por lo tanto sus tres ángulos miden 60°. La altura es igual al lado multiplicado por sen 60°. En nuestro caso la altura es $(10-x)/3.\sqrt{3}/2 = (10-x)\sqrt{3}/6$. El área resulta $1/2\,(10-x)/3\,.(10-x)\sqrt{3}/6 = (10-x)^2\sqrt{3}/36$.

La respuesta a nuestro problema es: el área mínima se alcanza tomando $\frac{40\sqrt{3}}{9+4\sqrt{3}}$m de alambre para el cuadrado y el resto para el triángulo.

EJERCICIOS

1. Se dispone de 240 metros de alambre tejido para construir un corral rectangular. Para uno de los lados se aprovechará un cerco existente.
   a. Dibujen un esquema que describa la situación descripta. ¿Cuáles son las magnitudes que definen las medidas del corral a construir? ¿Cuál es la relación entre ellas?
   b. Den tres ejemplos distintos de corrales que se puedan construir utilizando todo el alambre disponible. En cada uno de los casos determinen el área resultante.
   c. ¿Cuál es la expresión del área del corral, teniendo en cuenta la relación encontrada en el punto a)?
   d. Determinen las dimensiones que deberá tener el corral de área máxima que puede construirse con todo el alambre disponible.
2. Entre todos los rectángulos de área 9 ¿Cuál es el de menor perímetro?
3. Entre todos los rectángulos de un perímetro 12 ¿Cuál es el de área máxima?
4. Un agricultor desea cercar una superficie de 100 hectáreas en un campo rectangular, y después dividir por la mitad con una cerca paralela a uno de los lados del rectángulo ¿Cómo debe proceder para minimizar el costo de la cerca?
5. Encuentren el punto sobre la recta de ecuación $y = 2x-3$ más próximo al origen.
6. Determinen los puntos de la hipérbola $y^2 - x^2 = 1$ que están más cercanos al punto (2,0).
7. Calculen las dimensiones del rectángulo que tiene área máxima y que se puede inscribir en un círculo de radio 4.
8. Determinen las dimensiones del rectángulo de mayor área que tenga su base en el eje x y sus otros dos vértices arriba de ese eje sobre la parábola de ecuación $y = 8 - x^2$.
9. Una hoja de papel rectangular debe tener 18 cm^2 de texto impreso, márgenes superior e inferior de 2 cm de ancho y márgenes laterales de 1 cm de ancho. Obtengan las dimensiones que minimizan la superficie de la hoja.
10. Determinen el valor de c de manera de que el segmento S de la Figura 1 sea lo más largo posible.

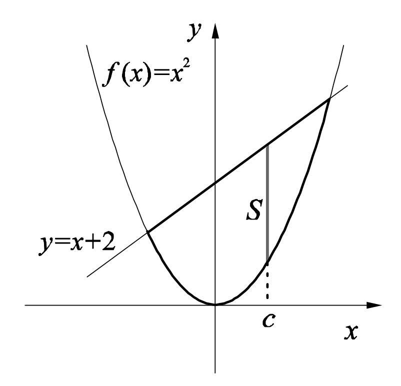
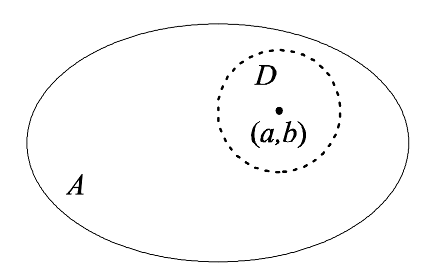


Figura 1.

9.1 Extremos en varias variables

Extremos locales

Análogamente a lo que hicimos para funciones de una variable, definiremos para funciones de varias variables la noción de extremo local. En primer lugar, definiremos lo que es un entorno de un punto en el plano o en el espacio.



El conjunto A es un entorno del punto (a, b)

Definición

Sea (a, b) un punto de R^2 diremos que un conjunto A es un **entorno** del punto (a, b) si existe un disco D de centro en (a, b) tal que $D \subset A$.

Definamos ahora las nociones equivalentes a las formuladas para funciones de una variable:

Definición

Sea (a, b) un punto del dominio de una función $f(x, y)$, diremos que:

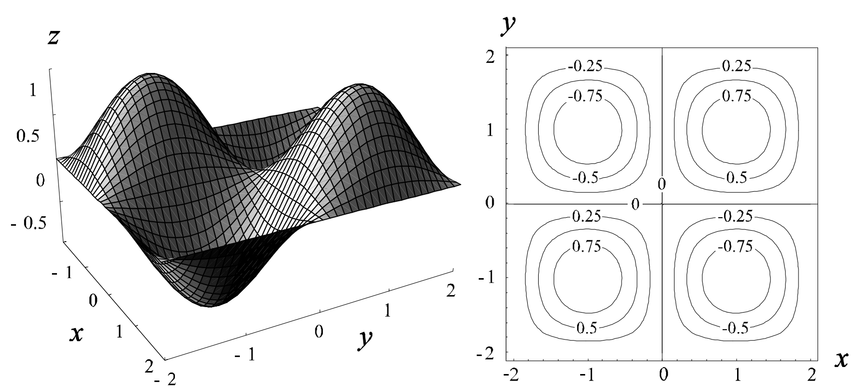
1. $f(x, y)$ tiene un **máximo local** en (a, b) si se tiene que $f(a, b) \geq f(x, y)$ para todo (x, y) en algún entorno de (a, b).

2. $f(x, y)$ tiene un **mínimo local** en (a, b) si se tiene que $f(a, b) \leq f(x, y)$ para todo (x, y) en algún entorno de (a, b).

3. En cualquiera de los dos casos diremos que $f(x, y)$ tiene un **extremo local** en (a, b).

Si alguna de las desigualdades anteriores se cumple para todo (x, y) del dominio de f diremos que tiene en (a, b) un **extremo absoluto** (máximo o mínimo, según el caso).

Observando la gráfica, es más o menos claro que en los puntos que corresponden a extremos locales, el plano tangente será horizontal:



En efecto, tenemos el siguiente teorema:

Teorema

Supongamos que en el punto (a, b) la función $f(x, y)$ tiene un extremo local, y supongamos que existen las derivadas parciales $f_x(a, b)$ y $f_y(a, b)$. Entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} f_x(a,b) &= 0 \\ f_y(a,b) &= 0 \end{aligned}$$

Demostración: Si consideramos la función de una variable $g(x) = f(x, b)$ tendremos que $g(x)$ tiene un extremo local en $x = a$. Además g es derivable en $x = a$ puesto que

$$g'(a) = f_x(a, b)$$

Por lo tanto (ver página 86) tendremos que:

$$g'(a) = 0$$

lo cual muestra que $f_x(a, b) = 0$.

De la misma manera mostramos que $f_y(a, b) = 0$.

Observaciones:

1. La conclusión del teorema anterior puede expresarse como $\nabla f(a, b) = 0$.

2. En el caso de que f sea diferenciable en (a, b) la condición del teorema dice que la ecuación del plano tangente a la gráfica de $f(x, y)$ en (a, b) es:

   $$z = f(a, b)$$

   y por lo tanto es un plano horizontal.

Definición

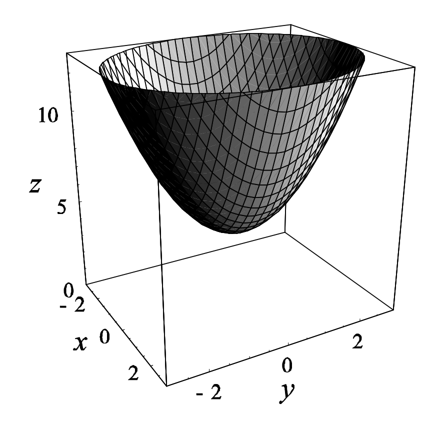
Diremos que un punto (a, b) de continuidad de $f(x, y)$ es un **punto crítico** (o **punto estacionario**) si no existe alguna de las derivadas parciales de f en (a, b) o si ambas derivadas son nulas.

De modo que del teorema anterior puede deducirse el siguiente criterio:

Si $f(x, y)$ tiene un extremo local en un punto de continuidad (a, b), entonces (a, b) es un **punto crítico**.

¿Cuándo en un punto crítico hay un extremo local? O más específicamente, ¿cuándo en un punto crítico hay un máximo local o un mínimo local? Veamos un par de ejemplos:

EJEMPLO



El $(0,0)$ es un punto crítico de $f(x,y)=x^2+y^2+4$

1. Sea $f(x,y)=x^2+y^2+4$.

   Tenemos que:
   $$\nabla f(x,y)=\langle 2x,2y\rangle$$
   que se anulará cuando:
   $$\begin{aligned}2x &= 0\\ 2y &= 0\end{aligned}$$
   lo cual sucede únicamente en $(x,y)=(0,0)$. Como $f(0,0)=4\leq x^2+y^2+4$, en $(0,0)$ hay un mínimo local (en rigor, hay un mínimo absoluto). Ver Figura 1 al margen.

2. Sea $f(x,y)=x^2-y^2$. De la misma forma que en el ejemplo anterior, obtenemos que el único punto crítico de $f(x,y)$ es $(x,y)=(0,0)$ (hacerlo). Pero sobre el eje x (es decir, sobre la recta $y=0$) se tiene:
   $$f(x,0)=x^2>0 \text{ si } x\neq 0$$
   y sobre el eje y:
   $$f(0,y)=-y^2<0 \text{ si } y\neq 0$$
   vemos que en cualquier entorno de $(0,0)$ hay puntos donde f es positiva, y puntos donde f es negativa. De modo que $f(0,0)=0$ no puede ser un valor extremo de f. Usen Maple para visualizar la situación.

En el caso de una función de una variable para decidir si en un punto crítico la función tenía un mínimo o un máximo local estudiamos el signo de la derivada. Para funciones de más variables esto no es practicable. Sin embargo hay un criterio para funciones de una variable que es posible generalizar a funciones de dos variables, y es el siguiente:

Teorema

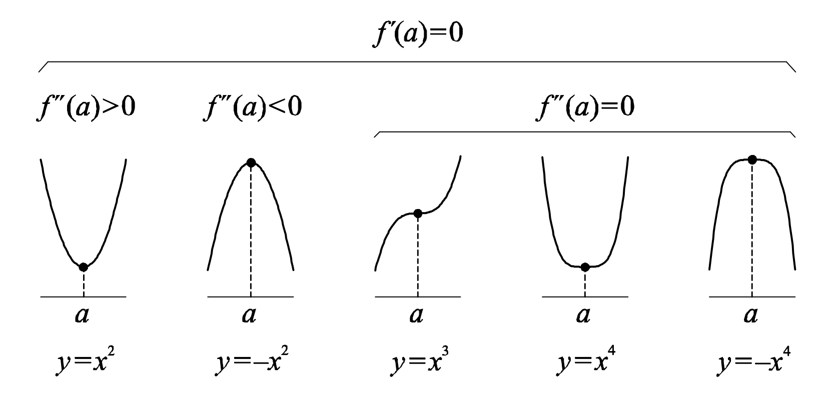
Criterio de la derivada segunda Supongamos que $f(x)$ tiene un punto crítico en $x=a$ y que la derivada segunda $f''(a)$ existe y es continua cerca de a. Se tiene el siguiente criterio:

- Si $f''(a)>0$ entonces $f(x)$ tiene un mínimo local en $x=a$

- Si $f''(a)<0$ entonces $f(x)$ tiene un máximo local en $x=a$

Demostración: Efectivamente, si $f''(a)>0$ y f'' es continua, entonces es positiva cerca de a y resulta que $f(x)$ es cóncava hacia arriba cerca de a. De manera que la gráfica de $f(x)$ está por arriba de la recta tangente en $(a,f(a))$ y por lo tanto f tiene un mínimo local en $x=a$. De la misma manera razonamos en el caso de que $f''(a)<0$.

El caso en que $f''(a) = 0$ no permite decidir nada. Puede haber un mínimo, un máximo o ni una cosa ni la otra.



EJERCICIOS

Encuentren los puntos críticos de las siguientes funciones y usen el criterio de la derivada segunda para clasificarlos. Si el criterio no decide investiguen el signo de la derivada primera.

1. $f(x) = x^4 - 4x^3$
2. $f(x) = (x^2 - 1)^3$
3. $f(x) = x^2 e^x$

La generalización del criterio a una función $f(x, y)$ de dos variables involucra a todas las derivadas de segundo orden, que son cuatro: $f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}, f_{yx}$. Cuando la función tiene derivadas parciales de segundo orden continuas en un dominio D las derivadas cruzadas f_{xy} y f_{yx} son iguales (este resultado se conoce como Teorema de Clairaut).

A continuación enunciamos el criterio:

Teorema

Criterio de las derivadas segundas: Supongamos que las derivadas parciales de segundo orden de $f(x, y)$ son continuas en un entorno de un punto crítico (a, b) (en particular las derivadas $f_x(a, b)$ y $f_y(a, b)$ existen y son nulas). Llamemos

$$D = D(a, b) = f_{xx}(a, b)\ f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

entonces:

Si $D > 0$ y $f_{xx}(a, b) > 0$ entonces $f(x, y)$ tiene un mínimo local en (a, b)

Si $D > 0$ y $f_{xx}(a, b) < 0$ entonces $f(x, y)$ tiene un máximo local en (a, b)

Si $D < 0$ entonces $f(x, y)$ no tiene ni un máximo ni un mínimo en (a, b). Diremos en este caso que f tiene un **punto de ensilladura** (o **punto silla**) en (a, b).

Si $D = 0$ el criterio no da certeza. Puede haber un mínimo, un máximo o un punto silla.

EJEMPLO

Determinemos y clasifiquemos los puntos críticos de $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Como la función es derivable en todo su dominio, buscamos los (x,y) que anulen a ambas derivadas parciales:

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ f_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema anterior. La primera ecuación dice que $y = x^2$, reemplazando en la segunda queda $x^4 - x = x(x^3 - 1) = 0$ por lo cual debe ser:

$$\begin{aligned} x &= 0 \text{ y por lo tanto } y = 0 \text{ o bien:} \\ x &= 1 \text{ y por lo tanto } y = 1 \end{aligned}$$

Los puntos críticos son entonces $(0,0)$ y $(1,1)$. Calculamos $D(x,y)$:

$$\begin{aligned} D(x,y) &= f_{xx}(x,y)\, f_{yy}(x,y) - [f_{xy}(x,y)]^2 \\ &= 6x\, 6y - [-3]^2 \\ &= 36xy - 9 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} D(0,0) &= -9 < 0 \\ D(1,1) &= 36 - 9 = 25 > 0 \end{aligned}$$

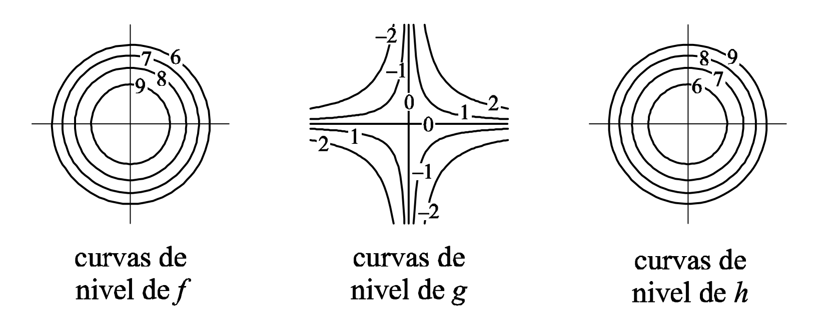
De donde $(0,0)$ es un punto silla. Como $f_{xx}(1,1) = 6 > 0$ resulta que en $(1,1)$ hay un mínimo local.

EJERCICIOS

1.

2. Respecto a la función del ejemplo anterior, utilicen Maple para hacer un mapa de contorno de la función $f(x,y)$ ¿cómo se ve el mapa alrededor de los puntos críticos encontrados?

3. Supongan que $(0,0)$ es un punto crítico para las funciones $f(x,y)$, $g(x,y)$ y $h(x,y)$. A partir de los gráficos clasifiquen a $(0,0)$ para cada una de las funciones.



4. Encuentren los puntos críticos y clasifíquenlos para las siguientes funciones:

   a. $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 4x + 4y$

   b. $f(x,y) = x^3y + 12x^2 - 8y$

c. $f(x, y) = e^{4y-x^2-y^2}$

d. $f(x, y) = 2x^3 + xy^2 - x^2 - y^2$

e. $f(x, y) = xy(1 - x - y)$

5. Dada $f(x, y) = x^2 y$

a. Hallen los puntos críticos de $f(x, y)$.

b. ¿Pueden usar el criterio de la derivadas segundas para clasificar los puntos críticos?

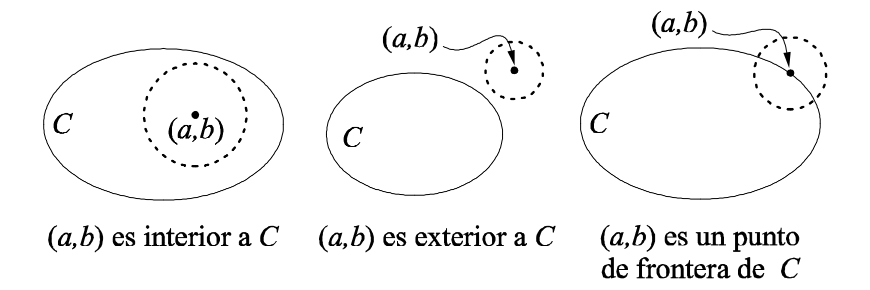
c. Clasifiquen los puntos críticos encontrados.

Extremos absolutos

Consideramos ahora la cuestión de determinar los extremos absolutos de una función $f(x, y)$ con dominio D en una región $C \subset D$. Tal como vimos para funciones de una variable, la existencia de tales extremos dependerá tanto de la función $f(x, y)$ como del tipo de región C que consideremos.

Supongamos que C es un subconjunto del plano $\mathbf{R}^2$ y sea (a, b) un punto cualquiera.

- Diremos que (x, y) es un punto interior a C si existe un disco abierto B tal que $(a, b) \in B \subset C$.
- Diremos que (x, y) es un punto exterior a C si existe un disco abierto B tal que $(a, b) \in B \subset \mathbf{R}^2 - C$.
- Diremos que (x, y) es un punto frontera a C si no es interior ni exterior (o sea: todo disco abierto que contiene a (a, b) tambien contiene al menos un punto perteneciente a C y al menos un punto no perteneciente a C).

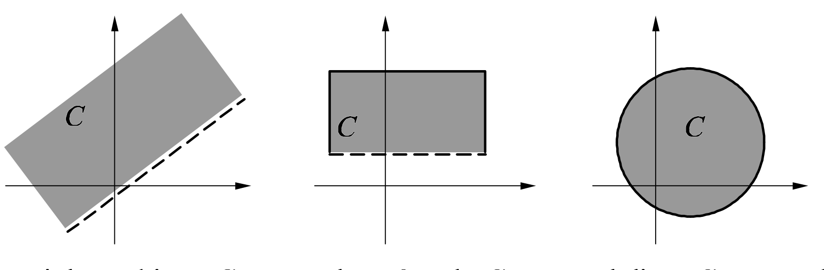


Recordemos que en el caso de una variable, una función continua en un intervalo ce-rrado alcanza un valor máximo y un valor mínimo en el intervalo. En cuanto al dominio considerado, este resultado depende como se vió en el ejemplo 9, de dos cuestiones:

- que el intervalo sea finito
- el intervalo contenga a sus puntos extremos (que son sus puntos frontera)

Este resultado se generaliza a varias variables de la siguiente manera.

- Un conjunto $C \subset \mathbf{R}^2$ se dice **acotado** si está contenido en algún disco. Esto es equivalente a pedir que las coordenadas de los puntos de C no se hagan arbitrariamente grandes. Es el caso del intervalo finito en la recta.
- Un conjunto $C \subset \mathbf{R}^2$ se dice **cerrado** si contiene a todos sus puntos frontera.



El semiplano abierto C no es cerrado ni acotado | El rectángulo C es acotado pero no cerrado | El disco C es cerrado y acotado

Tenemos el siguiente resultado:

Teorema

Sea $f(x, y)$ una función continua en un conjunto C que sea cerrado y acotado. Entonces f alcanza un máximo absoluto y un mínimo absoluto en C.

Otra vez, el teorema solamente asegura la existencia de los extremos absolutos, no dice cuáles son ni cuántos son. Ahora bien, supongamos que tenemos una función $f(x, y)$ continua en una región cerrada y acotada C y supongamos que $f(x, y)$ alcanza en $(a, b) \in C$ un extremo absoluto. Hay dos posibilidades:

- (a, b) es interior a C. Entonces debe ser un punto crítico de $f(x, y)$. Esto es: existen las derivadas parciales y son nulas o bien alguna de las derivadas parciales no existe en (a, b).
- (a, b) es un punto frontera de C.

Una manera en principio viable de encontrar los extremos absolutos de $f(x, y)$ en C consiste entonces en construir una lista de candidatos integrada por: 1) Los puntos críticos de $f(x, y)$ en el interior de C. 2) Los extremos de $f(x, y)$ en la frontera de C. Un vez hecho esto, se evalúa la función en los elementos de la lista, y se determinan los extremos por comparación. Veamos un ejemplo:

EJEMPLO

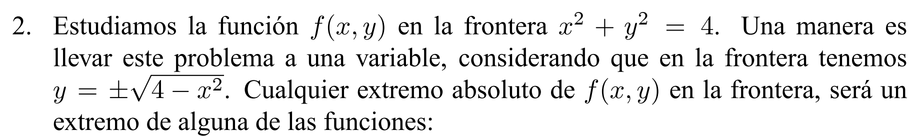
Hallemos los extremos absolutos de $f(x, y) = 2xy$ en el disco cerrado $x^2 + y^2 \leq 4$.

1. Notamos, en primer lugar que la función es continua y la región es cerrada y acotada (¿por qué?). Encontramos los puntos críticos en el interior del disco $x^2 + y^2 < 4$. Como la función es derivable, buscamos los puntos (x, y) tales que

$\nabla f(x,y) = \mathbf{0}$:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2y = 0 \\ f_y(x,y) &= 2x = 0 \end{aligned}$$

La única solución es $(x,y) = (0,0)$. Por lo tanto $(0,0)$ es el único punto crítico en el interior del disco que irá a integrar nuestra lista de candidatos.



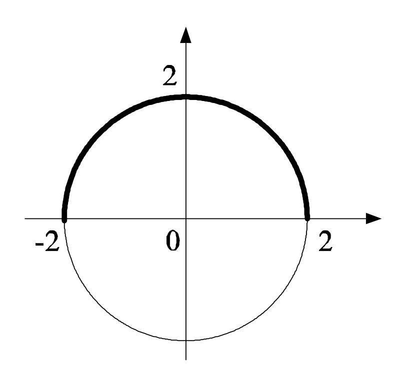
2. Estudiamos la función $f(x,y)$ en la frontera $x^2+y^2 = 4$. Una manera es llevar este problema a una variable, considerando que en la frontera tenemos $y = \pm\sqrt{4-x^2}$. Cualquier extremo absoluto de $f(x,y)$ en la frontera, será un extremo de alguna de las funciones:

$$g(x) = f(x, \sqrt{4-x^2}) = 2x\sqrt{4-x^2} \text{ para } -2 \le x \le 2$$
$$h(x) = f(x, -\sqrt{4-x^2}) = -2x\sqrt{4-x^2} \text{ para } -2 \le x \le 2$$

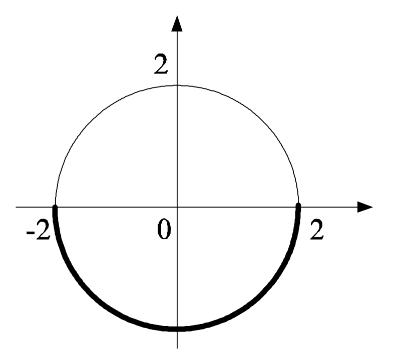
Como $h(x) = -g(x)$ los extremos absolutos de ambas funciones serán los mismos (el mín de una será el máx de la otra y recíprocamente). Tenemos:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 0 \\ 2\sqrt{4-x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{4-x^2}} &= 0 \\ \frac{8-2x^2-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} &= 0 \\ \frac{8-4x^2}{\sqrt{1-x^2}} &= 0 \\ x^2 &= 2 \\ x &= \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

Recordando que $y = \pm\sqrt{4-x^2}$ tendremos los puntos $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$; $\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$; $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$; $\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$. No debemos olvidar los extremos del intervalo $x = -2$ y $x = 2$ que dan $y = 0$.



La parte del borde definida por $y = \sqrt{4-x^2}$ para $-2 \le x \le 2$.



La parte del borde definida por $y = -\sqrt{4-x^2}$ para $-2 \le x \le 2$.

3. Tenemos la lista:

(x,y)	$(\sqrt{2},\sqrt{2})$	$(\sqrt{2},-\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$	$(0,0)$	$(-2,0)$	$(2,0)$
$f(x,y)$	4	-4	-4	4	0	0	0
-	máx.	min.	min.	máx.	-	-	-

La respuesta a nuestro problema es entonces: el valor máximo que alcanza la función $f(x,y) = 2xy$ en el disco cerrado $x^2+y^2 \le 4$ es 4 y lo hace en los puntos $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ y $\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$; el valor mínimo es -4 y lo alcanza en $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ y $\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$.

EJERCICIOS

1. Encuentren los valores máximo y mínimo absolutos de f en el conjunto C. Interpreten gráficamente.

   a. $f(x,y) = x^2+2xy+3y^2$ donde C es la región triangular cerrada de vértices $(-1,1); (2,1); (-1,-2)$

b. $f(x,y) = 1 + xy - x - y$ donde C es la región acotada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 4$.

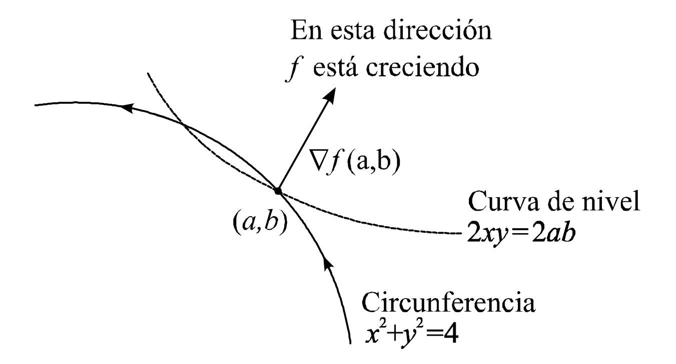
No siempre en un problema de optimización el dominio de la función a optimizar es cerrado y acotado. En tal caso, se deberán encontrar argumentos para garantizar que alguno de los candidatos encontrados realmente sea un extremo absoluto.

Método de los multiplicadores de Lagrange

Hay en el método de resolución que hemos seguido en el ejemplo anterior una parte bastante engorrosa, y es la de buscar los candidatos en la frontera de la región. Afortunadamente, una hermosa idea geométrica debida al gran matemático francés Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) permite simplificar en mucho la tarea.

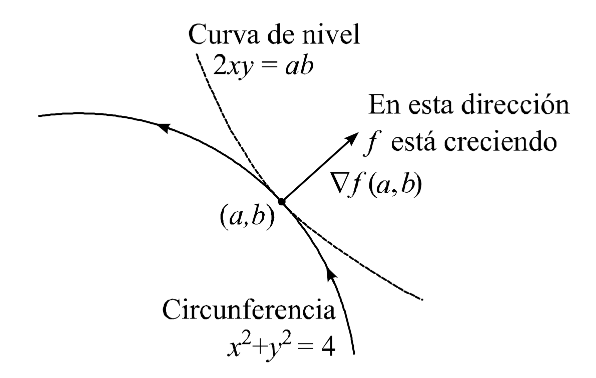
Encaremos nuevamente el punto 2 del ejemplo anterior, esto es: encontrar los extremos de $f(x,y) = 2xy$ en la circunferencia $C : x^2 + y^2 = 4$ que era la frontera de nuestra región. Consideremos un punto cualquiera (a,b) en la circunferencia. Por ese punto pasará una curva de nivel de la función $f(x,y)$, concretamente la curva $2xy = 2ab$. La idea geométrica es la siguiente: si en (a,b) hay un extremo de $f(x,y)$ sobre la circunferencia C, necesariamente la curva de nivel y la circunferencia deben ser tangentes.

Podemos pensarlo así: si me estoy moviendo por la circunferencia y al pasar por (a,b) la curva de nivel de f es transversal, entonces en la dirección de la circunferencia la función está creciendo o decreciendo y por lo tanto en (a,b) no puede haber un extremo:[8]



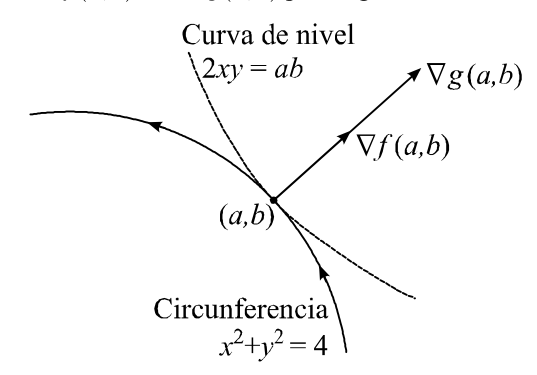
De manera que para que (a,b) sea candidato a extremo, la curva de nivel y la circunferencia deben ser tangentes:

[8] Para interpretar el dibujo, recuerden que $\nabla f(a,b)$ da la dirección de máximo crecimiento



Vamos a plantear la condición para que ambas curvas -la de nivel de f y la circunferencia C - sean tangentes. Si llamamos $g(x,y) = x^2 + y^2$ podemos ver a C como la curva de nivel 4 de $g(x,y)$. Para que las dos curvas sean tangentes, sus gradientes (que son respectivamente ortogonales) deben ser paralelos, esto es:

$$\nabla f(a,b) = \lambda \nabla g(a,b) \text{ para algún valor de } \lambda$$



Si planteamos la condición en nuestro caso queda:

$$\langle 2y, 2x \rangle = \lambda \langle 2x, 2y \rangle$$

que en realidad es un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{cases} 2y = 2\lambda x \\ 2x = 2\lambda y \end{cases}$$

Si queremos despejar λ en la primera ecuación, debemos suponer que $x \neq 0$. En tal caso obtenemos:

$$\lambda = \frac{y}{x}$$

y reemplazamos en la segunda:

$$\begin{aligned} x &= \frac{y^2}{x} \\ x^2 &= y^2 \end{aligned}$$

Pero (x, y) es un punto de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$, por lo tanto:

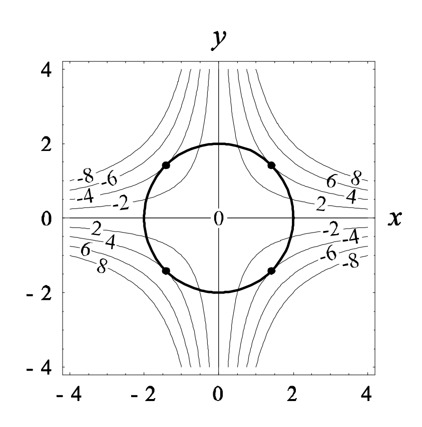
$$\begin{aligned} 2x^2 &= 4 \\ x &= \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

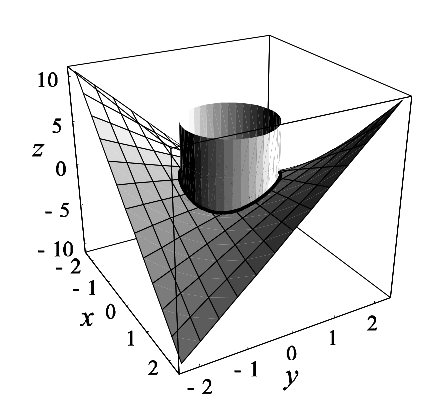
de donde:

$$x = \pm\sqrt{2}$$

y se obtienen los cuatro puntos del ejemplo anterior: $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$; $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$; $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$;

$(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. Tenemos que considerar ahora el caso $x = 0$, mirando la primera ecuación vemos que necesariamente debe ser $y = 0$, pero el punto obtenido $(0, 0)$ no pertenece a la circunferencia. El resto del razonamiento es el mismo que en el ejemplo. La gráfica muestra las curvas de nivel de $z = 2xy$ y la circunferencia C:





Enunciamos el resultado. La demostración, por si alguien está interesado, la damos al final del capítulo.

Teorema

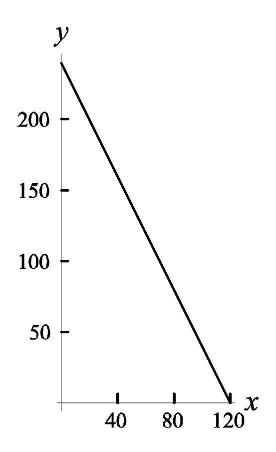
(Multiplicadores de Lagrange) Sean $f(x, y)$ y $g(x, y)$ dos funciones diferenciables en un entorno del punto (a, b). Sea $g(a, b) = k$ y supongamos que $\nabla g(a, b) \neq 0$. Entonces si f alcanza en (a, b) un extremo sobre la curva $g(x, y) = k$ se tiene que:

$$\nabla f(a, b) = \lambda \nabla g(a, b)$$

Como ejemplo reharemos un problema propuesto en los ejercicios de una variable:

EJEMPLO

Se dispone de 240 metros de alambre tejido para construir un corral rectangular. Para uno de los lados se aprovechará un cerco existente. Encontrar la mayor superficie que se puede cercar en esas condiciones.



Llamemos $A(x, y) = xy$ al área del corral. Como para uno de los lados no se usará alambre, la longitud del cerco será $g(x, y) = 2x + y = 240$.

Tenemos el siguiente problema: maximizar $A(x, y) = xy$ sujeta a la restricción $2x + y = 240$. Notemos que además deben ser $x \geq 0$ e $y \geq 0$, con lo que el dominio que estamos considerando es el segmento de la recta $2x + y = 240$ que está en el primer cuadrante (ver dibujo al margen) por lo que es cerrada y acotada lo que garantiza la existencia de los extremos.

Puesto que $A(x, y)$ y $g(x, y)$ son diferenciables por ser polinomios, y que $\nabla g = \langle 2, 1 \rangle \neq \mathbf{0}$ estamos en las condiciones del Teorema anterior. Si en (x, y) hay un

extremo, tendrá que ser:

$$\begin{aligned}\nabla A(x,y) &= \lambda \nabla g(x,y)\\ \langle y,x\rangle &= \lambda\langle 2,1\rangle\\ y &= 2\lambda\\ x &= \lambda\end{aligned}$$

como $2x+y=240$ tendremos:

$$\begin{aligned}2\lambda+2\lambda &= 240\\ \lambda &= 60\\ x &= 60\\ y &= 120\end{aligned}$$

Podemos asegurar que en el punto encontrado hay un máximo, puesto que en los extremos del segmento $(120,0)$ y $(0,240)$ la función área es mínima. El máximo, por lo tanto, lo alcanza en el interior del segmento que necesariamente es el punto encontrado. El máximo valor del área es $A(60,120)=7200\ m^2$.

Resumimos el uso del método de los multiplicadores de Lagrange.

- **El problema:** Se trata de encontrar los valores extremos de una función $f(x,y)$ que llamamos **función objetivo**, sobre la curva definida por una ecuación implícita de la forma $g(x,y)=k$ llamada **restricción**.
- **El método:** Tiene dos etapas
  a. Encontrar todos los valores de x, y y λ que resuelvan el sistema:
  $$\begin{cases}\nabla f(x,y)=\lambda\nabla g(x,y)\\ g(x,y)=k\end{cases}$$
  b. Evaluar a la función objetivo en cada uno de los (x,y) encontrados en el punto anterior. Si la curva $g(x,y)=k$ es acotada (Por ejemplo: una elipse), el mayor valor será el máximo y el menor será el mínimo. Si no lo es, habrá que estudiar la situación con más detalle.

Observación: Lo visto para una función $f(x,y)$ de dos variables y restricción $g(x,y)=k$ se aplica sin cambios a una función $F(x,y,z)$ de tres variables sobre una superficie definida implícitamente por $g(x,y,z)=k$.

EJEMPLO

Encontrar los valores extremos de $f(x,y,z)=xy+z^2$ en la esfera $x^2+y^2+z^2\leq 1$.

Como $f(x,y)$ es continua y la esfera es cerrada y acotada, la función alcanza un valor máximo y un valor mínimo en ella. Dividimos el problema en dos partes:

1. Encontramos los puntos estacionarios $\nabla f(x,y,z)=0$ en el interior de la esfera $x^2+y^2+z^2<1$.

2. Encontramos los extremos en el borde de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ usando el método de los multiplicadores de Lagrange.

Lo hacemos:

1. $\nabla f(x, y, z) = \langle y, x, 2z \rangle = \langle 0, 0, 0 \rangle \to x = 0; y = 0; z = 0$. El origen es el único punto estacionario de $f(x, y, z)$; nos quedamos con $P_1(0, 0, 0)$.

2. Ahora trabajaremos en el borde $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Llamamos $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Tenemos:
$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \\ g(x, y, z) = k \end{cases}$$
esto es:
$$\begin{aligned} \langle y, x, 2z \rangle &= \lambda \langle 2x, 2y, 2z \rangle \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} y &= \lambda 2x \quad (1) \\ x &= \lambda 2y \quad (2) \\ 2z &= \lambda 2z \quad (3) \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \qquad (4) \end{aligned}$$
Observando el sistema, vemos que, de la tercera ecuación podríamos despejar λ simplificando z. Pero para ello, debemos suponer que $z \neq 0$. Por lo tanto:

Para $z \neq 0$ obtenemos $\lambda = 1$.

Reemplazamos en (1) y (2)
$$\begin{aligned} y &= 2x \\ x &= 2y \end{aligned}$$
cuyas soluciones son $x = 0$ e $y = 0$. Los puntos sobre la esfera en esas condiciones son $P_2(0, 0, 1)$ y $P_3(0, 0, -1)$.

Si $z = 0$ la ecuación (3) se satisface para cualquier valor de λ. Haciendo el mismo reemplazo que antes en (1) y (2):
$$y = 4\lambda^2 y$$
Aquí también, para despejar λ, debemos suponer que $y \neq 0$. En tal caso tendremos $\lambda = \pm\frac{1}{2}$. Para esos valores de λ las ecuaciones (1) y (2) nos dan:
$$\begin{aligned} y &= \pm x \\ x &= \pm y \end{aligned}$$
Reemplazando en (4)
$$\begin{aligned} x^2 + x^2 &= 2x^2 = 1 \\ x &= \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y &= \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$
Obtenemos cuatro puntos más: $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$.

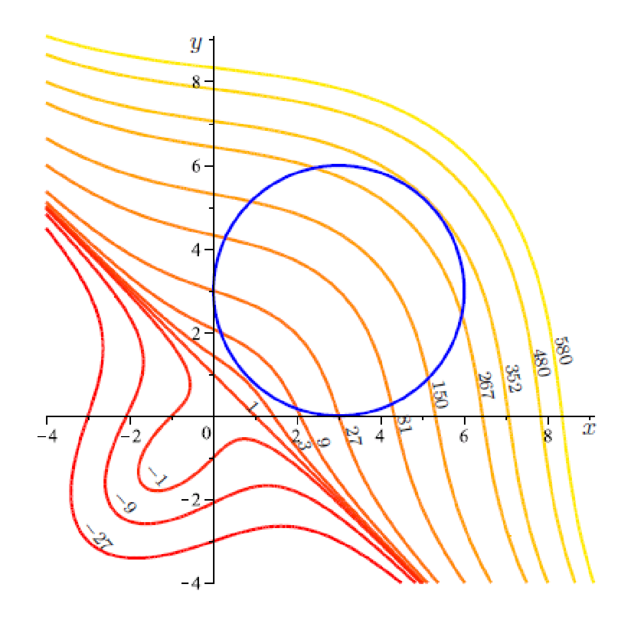
Queda por considerar el caso $y = 0$. Los únicos puntos en la esfera con $y = 0$ y $z = 0$ son $(1, 0, 0)$ y $(-1, 0, 0)$ los que no pueden verificar la ecuación (2).

Por último evaluamos $f(x, y, z) = xy + z^2$ en la lista.

P	$f(x,y,z) = xy + z^2$	
$(0,0,0)$	0	
$(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$	$1/2$	
$(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$	$-1/2$	mínimo
$(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$	$-1/2$	mínimo
$(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$	$1/2$	
$(0,0,1)$	1	máximo
$(0,0,-1)$	1	máximo

EJERCICIOS

1. En el gráfico de abajo se puede ver a la circunferencia $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 9$ y a algunas curvas de nivel de la función $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy$. Estimen a partir del dibujo los valores máximos y mínimos absolutos de $f(x,y)$ sujeta a la restricción $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 9$



2. Usen ML para hallar el máximo y mínimo de la función $f(x,y)$ con la restricción $g(x,y) = k$
   a. $f(x,y) = xy$ sujeta a $x^2 + y^2 = 8$
   b. $f(x,y) = 4y^2x$ sujeta a $x^2 + y^2 = 3$
   c. $f(x,y) = xe^y$ sujeta a $x^2 + y^2 = 2$
   d. $f(x,y) = x^2y^2$ sujeta a $x^2 + 4y^2 = 24$

3. Encuentren el máximo y el mínimo de la función en la región que se indica:
   a. $f(x,y) = 4xy$ sujeta a $x^2 + y^2 \leq 8$
   b. $f(x,y) = 4x^2y$ sujeta a $x^2 + y^2 \leq 3$

4. Encuentren los puntos sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 27$ de manera que la suma de sus coordenadas sea la mínima posible.

5. Encuentren el punto más cercano en la curva al punto dado, usando el método de los ML

   a. $y = 3x - 4$ al origen

   b. $y = x^2$ al $(3, 0)$

   c. $y = (x-1)^2 - 1$ al (1,2)

Teorema

(Multiplicadores de Lagrange) Sean $f(x, y)$ y $g(x, y)$ dos funciones diferenciables en un entorno del punto (a, b). Sea $g(a, b) = k$ y supongamos que $\nabla g(a, b) \neq 0$. Entonces si f alcanza en (a, b) un extremo sobre la curva $g(x, y) = k$ se tiene que:

$$\nabla f(a, b) = \lambda \nabla g(a, b)$$

Demostración: Ya hemos visto que podemos suponer la existencia de una parametrización $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$ de un trozo de la curva $g(x, y) = k$ que pase por (a, b), de manera que para cierto t_0 tendremos

$$\begin{aligned} x(t_0) &= a \\ y(t_0) &= b \end{aligned}$$

Si consideramos la función compuesta $f(x(t), y(t))$ puesto que $(x(t), y(t))$ pertenece a la curva, esa función tendrá un extremo para $t = t_0$ y por lo tanto:

$$\left.\frac{d}{dt} f(x(t), y(t))\right|_{t=t_0} = 0$$

por otro lado, usando la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} \left.\frac{d}{dt} f(x(t), y(t))\right|_{t=t_0} &= \nabla f(x(t_0), y(t_0)) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0 \\ \nabla f(a, b) \cdot \mathbf{r}'(t_0) &= 0 \end{aligned}$$

Por otro lado, como $\mathbf{r}(t)$ parametriza a $g(x, y) = k$ se tendrá que:

$$g(x(t), y(t)) = k \text{ para todo } t \text{ en cierto intervalo}$$

y por lo tanto:

$$\frac{d}{dt} g(x(t), y(t)) = \nabla g(x(t), y(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$$

en particular:

$$\begin{aligned} \nabla g(x(t_0), y(t_0)) \cdot \mathbf{r}'(t_0) &= 0 \\ \nabla g(a, b) \cdot \mathbf{r}'(t_0) &= 0 \end{aligned}$$

Resultando que ambos vectores $\nabla f(a, b)$ y $\nabla g(a, b)$ son perpendiculares al vector tangente $\mathbf{r}'(t_0)$ y por lo tanto, paralelos entre sí.